

筆答専門試験科目（午前）

2020 大修

地球惑星科学

時間 9 : 3 0 ~ 1 2 : 0 0

注 意 事 項

1. 以下の4問（1～4）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の答案用紙に記入せよ。1問につき答案用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各答案用紙に必ず問題番号（1～4）及び受験番号を記入せよ。

[1]

1-1. 以下の枠内の文章を読み、設問に答えよ。

太陽系に存在する元素のうち最も多いものはH(水素)であり、以下順に He, [1], [2], N, Ne, [3], Si, [4]と続く。この元素の並びを宇宙の元素存在度とよぶ。これら元素の量比は [A] と [B] を基に推定されたものであり、揮発性の高い元素を除くと、両者の分析結果はよく一致している。これに対して、地殻の元素存在度は一般にクラーク数と呼ばれ、存在度の高い順に [1], Si, [5], [4], [6], Na, K, [3] と続く。これら元素の量比は主に [C] の化学分析に基づいて推定されたものである。

1-1-1. 文中の[1]から[6]に当てはまる元素を記号でそれぞれ答えよ。

1-1-2. 文中の[A]から[C]に当てはまる最も適切な語句をそれぞれ答えよ。

1-1-3. 地殻の U/Si 比は宇宙の元素存在度から期待される値よりもおよそ 100 倍高い。地殻に U が濃集する要因は U という元素にどのような性質があるためかを 3 行程度で説明せよ。また、これと同様の性質をもつ元素を U の他に 2 つ挙げよ。

1-2. 放射性同位体について、次の問に答えよ。

1-2-1. 一般に、ある量 P の放射性同位体が壊変定数 λ で娘元素に放射壊変するとき $dP/dt = -\lambda P$ が成り立つ。ある年代 t で噴出・固化した岩石には、 $t=0$ の時にこの放射性同位体が P_0 含まれていたとする。岩石中の放射性同位体の量 P を年代 t の関数として表わせ。また、放射性同位体の半減期 τ と λ の間の関係式を示せ。

1-2-2. 前問 1-2-1 の岩石が固化したときに、 $t = 0$ で娘元素が D_0 含まれていたとする。この岩石中に含まれる娘元素の量 D を D_0, P, λ, t の関数として表せ。

1-2-3. 質量分析計を用いた同位体計測では D, P の絶対量を測定するよりも、これら核種の比を測定する方が高精度に年代の推定ができる。このような年代推定法のひとつにアイソクロン法がある。この娘元素に別の安定同位体が存在し、その量 D_s が放射壊変に関与しない場合、この手法ではどのようにして年代値が求まるのか、その原理を数式と図を用いて説明せよ。また、年代と同時に D_0/D_s 比(初生比)が求まることも示せ。

1-2-4. 放射性同位体 ^{87}Rb は半減期 4.88×10^{10} 年で ^{87}Sr に壊変する。4.88 億年前に固結した火山岩の $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 初生比が 0.700 であり、 $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ が 10.0 であるとする。この岩石の現在の $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ はいくらか、有効数字 3 桁で答えよ。必要ならば $2^{1/100} = 1.00696$ を用いてよい。

1-2-5. 中央海嶺玄武岩の $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 比はほぼ 0.702~0.706 の間に入る。一方、大陸地殻を構成する花崗岩の $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 比はその年代や造構場によって様々な値をとるが、0.710 を超えるものが多い。この違いがなぜ生じるのか、3 行程度で説明せよ。ただし「放射壊変」と「部分融解」という語を必ず用いること。必要なら図を用いてもよい。

1-2-6. 海水の $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 比は海域によらず現在ほぼ 0.709 程度であるが、地質時代を通してこの比は一定でないことが明らかになっている。海洋へ Sr を供給する主要な過程を 2 つと、海洋から Sr を除去する主要な過程を 1 つ答えよ。また、ある地質時代の海水 $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 比が特に高かったとすると、その時代の海洋での生物生産は他の時代と比べてどのように異なっていたと予想されるかを理由とともに 3 行程度で答えよ。

[2] 火山噴火とマグマの上昇に関する以下の問いに答えよ。

2-1. 火山噴火は大別すると、流出性噴火 (effusive eruption) と爆発的噴火 (explosive eruption) に分類できる。流出性噴火とはどのようなものか？ 噴火の際に観察される典型的な火山現象を挙げながら 3 行以内で説明せよ。

2-2. 爆発的噴火は、様々な噴火様式に分類される。次にあげる 4 つの噴火様式の説明として最も適当なものを (ア) ～ (カ) の中からそれぞれ 1 つ選べ。

[a] ストロンボリ式噴火 [b] スルツェイ式噴火 [c] プリニー式噴火 [d] ブルカノ式噴火

(ア) 主として浅海底や湖底で発生するマグマ水蒸気爆発で、コックスティル型の噴煙で特徴づけられる。ベースサージを発生する場合がある。

(イ) マグマのしぶきを噴出する溶岩噴泉によって特徴づけられる高温・低粘性の玄武岩質マグマによる噴火。典型的には、数時間～数日間、噴火が継続する。

(ウ) 成長中の溶岩ドームが爆発を起こして小規模な火砕流 (熱雲) を発生させる噴火。1902 年マルチニーク島で 20 世紀最悪の火山災害をもたらした。

(エ) 高温のマグマの破片や赤熱した火山弾を空中に放出する噴火。数秒～数十分間隔で間欠的に爆発を繰り返す。火口周辺に火砕丘を形成する。

(オ) 不連続な激しい爆発的噴火。数メートルの大きさの火山岩塊を火口から数キロメートル飛ばす。数キロメートル以上の高さの噴煙柱を形成することがある。

(カ) しばしば成層圏に達するほどの高い噴煙柱を形成する大規模な持続的噴火。風下では広範囲に軽石が降下し、火砕流の発生を伴うことが多い。

2-3. マントルにおいて岩石の部分溶融により生成したマグマ (メルト) は集積し、浮力を獲得してメルトに富むダイアピルとして上昇を始める。いま、上昇するダイアピルを半径 R の球とすると、以下の設問に答えよ。

2-3-1. 浮力と周囲の岩石から受ける粘性抵抗がつりあって上昇しているとき、上昇速度 U を求めよ。ただし、鉛直方向にのみ運動すると仮定し、ダイアピルと周囲のマントルとの密度差を $\Delta\rho$ 、重力加速度を g とする。また、マントルの粘性率を η 、円周率を π とするとき、粘性抵抗 $4\pi\eta RU$ を受けるものとする。

2-3-2. ホットスポットのマントルプルームにおける上昇速度 U ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) を、以下の数値を使って有効数字 2 桁で求めよ。ダイアピルの半径: $R=200\text{ km}$ 、マントルの密度: $\rho=3300\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 、マントルの粘性率: $\eta=10^{21}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ 、マントルの体積膨張率: $\alpha=3\times 10^{-5}\text{ K}^{-1}$ 、重力加速度: $g=10\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ 、周囲のマントルとダイアピルの温度差: $\Delta T=200\text{ K}$ 、円周率: $\pi=3.14$ 。

2-4. 多くの火山では、マグマ溜まりは深さ数 $\text{km}\sim 10\text{ km}$ 程度の地殻内に存在すると考えられている。マグマが地殻内で滞留している証拠として、地震学および測地学による証拠をそれぞれ 2 行程度で説明せよ。

2-5. マグマ溜まりからのマグマの上昇を考える。いま、マグマは、メルト（液相）とガス（気相）の気液2相の混合物として上昇すると仮定する。すなわち、気相と液相は相対運動をせず、単相の流体として扱えるとき、以下の設問に答えよ。計算の過程も示すこと。

2-5-1. メルトの密度を ρ_L 、ガスの密度を ρ_G とし、混合物（＝マグマ）中に占めるガスの質量分率を n とするとき、マグマの密度 ρ を ρ_L 、 ρ_G 、 n を用いて表せ。

2-5-2. マグマ溜まり内でメルトに溶存していたガスの初期質量分率を n_0 とする。マグマが上昇する過程において、メルト中に溶存できるガスの量は、圧力の関数である溶解度 C に従う。すなわち、ガスは $C \geq n_0$ を満たす間は 100% メルトに溶存しているが、 $C < n_0$ となるとメルトから離溶を始める。メルトから離溶したガスは全て気相としてマグマ中に存在すると仮定するとき、 n を n_0 と C で表せ。ただし、 C はメルト中のガスの質量分率で表される。

2-5-3. メルトに溶存するガスとして H_2O のみを考える。流紋岩質メルトの場合、メルトへの H_2O の溶解度は圧力 P (Pa) のとき $C = s\sqrt{P}$ と近似できることが知られている。ただし、 $s = 4.0 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-0.5}$ である。圧力が 25 MPa の深さに 1100 K の温度の流紋岩質マグマがあるとき、マグマの密度 ρ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) を有効数字 2 桁で求めよ。ただし、気相は理想気体として振る舞うと仮定し、気体定数 $R = 8.3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ 、 H_2O のモル質量 $M_{H_2O} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ 、 $n_0 = 5.0 \text{ wt}\%$ 、とする。また、液相メルトの密度は $\rho_L = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ とする。

2-5-4. 持続的な噴火の場合、火道中を上昇する質量フラックス Q は一定であるとみなすことができる。いま、半径 30 m の円筒状の火道をマグマが上昇しているとき、設問 2-5-3 で求めたマグマの密度の値を用いて、圧力が 25 MPa の深さにおけるマグマの上昇速度 u ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) と質量フラックス Q ($\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$) を、それぞれ有効数字 2 桁で求めよ。ただし、ガスが離溶を始める前の上昇速度を $u_0 = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ とし、火道の半径は深さによらず一定であり、変形しないものとする。

[3]

3-1. 正の実数変数 x, y の関数として, ベータ関数 $B(x, y)$ は次のように表される。

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (1)$$

また, 正の実数 x の関数として, ガンマ関数は次のように表される。

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (2)$$

次の各問に答えよ。

3-1-1. 次の式が成り立つことを示せ。

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta \quad (3)$$

3-1-2. 次の積分 I をベータ関数を用いて表せ。

$$I = \int_0^1 \frac{s^{p-1}}{\sqrt{1-s^q}} ds \quad (4)$$

ただし, $p > 0, q > 0$ とする。

3-1-3. 次の式が成り立つことを示せ。

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty s^{2x-1} e^{-s^2} ds \quad (5)$$

3-1-4. 次の値を求めよ。

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (6)$$

3-1-5. 式 (5) を用いると $\Gamma(x)\Gamma(y)$ は,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^\infty t^{2x-1} e^{-t^2} dt \int_0^\infty s^{2y-1} e^{-s^2} ds$$

と表せる。この関係と式 (3) を参考にして, 次の式が成り立つことを示せ。

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = B(x, y)\Gamma(x+y) \quad (7)$$

3-2. 実数 t, x, y の関数 $P(t, x, y), Q(t, x, y), R(t, x, y), S(t, x, y)$ が以下の偏微分方程式を満たすとする。

$$\frac{\partial P}{\partial t} + P \frac{\partial P}{\partial x} = 2Q + 3x + \frac{\partial R}{\partial y} \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + P \frac{\partial Q}{\partial x} = -2P + \frac{\partial S}{\partial y} \quad (9)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + P \frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \quad (10)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + P \frac{\partial S}{\partial x} = R \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (11)$$

3-2-1. $P = R = S = 0$ の特殊な場合について、式 (8)–(11) を満たす Q は x にのみ依存する。この Q を求めよ。

3-2-2. 以下では $P = R = S = 0$ ではない場合を考え、 $Q = Q_0(x) + q$ と書くことにする。ここで、 $Q_0(x)$ は問 3-2-1. で求めた、 $P = R = S = 0$ の場合の解 Q である。 P, q, R, S は微小量であるとし、かつ t, y にのみ依存するとする。式 (8)–(11) をそれぞれ、微小量（およびその偏導関数）の 1 次までの量で近似し、微小量について線形な微分方程式に書き換えよ。以下では、ここで得られる 4 つの方程式を、線形化された偏微分方程式と呼ぶことにする。

3-2-3. 線形化された偏微分方程式の特解として、以下のようなものを考える。

$$\begin{pmatrix} P \\ q \\ R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{q} \\ \tilde{R} \\ \tilde{S} \end{pmatrix} e^{-i\omega t + iky} \quad \text{ただし, } \begin{cases} k: \text{ゼロでない実定数} \\ \omega, \tilde{P}, \tilde{q}, \tilde{R}, \tilde{S}: \text{ゼロでない複素定数} \end{cases} \quad (12)$$

線形化された偏微分方程式より、 $\tilde{P}, \tilde{q}, \tilde{R}, \tilde{S}$ は以下の形の線形連立方程式を満たす。

$$\begin{pmatrix} \omega & \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \omega & 0 & \beta \\ \beta & 0 & \omega & 0 \\ 0 & \beta & \delta & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{q} \\ \tilde{R} \\ \tilde{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

ここで、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はゼロでない複素数である。 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を、定数もしくは k の関数として書き表せ。

3-2-4. 式 (12) が線形化された偏微分方程式の解となるためには、 ω がある代数方程式を満たさなければならない。線形化された偏微分方程式が式 (13) に帰着することをふまえて、 ω の満たすべき方程式を $\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ を用いて書き表せ。ここでは $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に問 3-2-3. の結果を代入しなくてよい。

3-2-5. 1つの k の値に対して、問 3-2-4. で求めた方程式を満たす ω は 4 つ存在する。これに対応して、式 (12) の形の特解は 4 種類のもので存在する。 k^2 がある範囲内にあるとき、4 種類の特解のうちの 1 種類は、 $|P|$, $|q|$, $|R|$, $|S|$ が t の増加とともに指数関数的に増大するような解となる。そのような k^2 の範囲を求めよ。ここでは α , β , γ , δ に問 3-2-3. の結果を代入すること。

[4]

- 4-1. 慣性系に固定された直交座標系 $S(x, y, z)$ と、 S と原点を共有し z 軸のまわりに一定の角速度 $\Omega (> 0)$ で回転する別の直交座標系 $S'(X, Y, Z)$ がある (図1)。座標の原点には、質量 M の中心天体がある。この天体の質量は周囲の物体の質量よりもはるかに大きいと仮定し、天体は原点から動かないとみなす。 $Y = 0$ 平面上には、 $(X, Z) = (R, 0)$ (ただし $R > 0$) を通り、 X 軸から Z 軸方向に向かって角度 α (ただし $0^\circ < \alpha < 90^\circ$) だけ傾いているような、細い直線状のワイヤーがある (図2)。さらにこのワイヤー上には、摩擦を受けずに運動できる質量 m の粒子が束縛されている。粒子の運動に影響を及ぼす力は、ワイヤーから受ける束縛力を除けば、中心天体の重力のみであるとする。ワイヤーは変形せず、 R および α も時間とともに変化しないとする。中心天体と粒子のいずれも質点とみなしてよい。

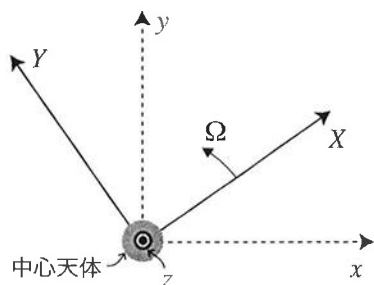


図1: $z = 0$ 平面

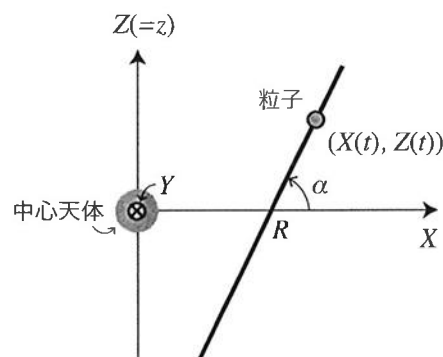


図2: $Y = 0$ 平面

- 4-1-1. 時刻 t における粒子の X 座標, Z 座標をそれぞれ $X(t)$, $Z(t)$ とする。 $C = \tan \alpha$ とおいて、 $Z(t)$ を $X(t)$, R , C を用いて書き表せ。
- 4-1-2. 粒子のポテンシャルエネルギー U を、 M , R , m , $X(t)$, C , および万有引力定数 G を用いて書き表せ。ただし、 U は粒子が無限遠方にいるときにゼロになるとする。
- 4-1-3. 慣性系 S で測った粒子の運動エネルギーを K とする。慣性系 S において粒子はワイヤーに沿って運動するだけでなく、 z 軸まわりに角速度 Ω で回転することに注意して、 K を Ω , m , $X(t)$, $\dot{X}(t)$, C を用いて書き表せ。ここで、 $\dot{X}(t) = dX(t)/dt$ である。
- 4-1-4. 粒子の運動を表す、 $X(t)$ の t に関する 2 階の微分方程式を求めよ。
- 4-1-5. Ω がある条件を満たすとき、粒子は回転系 S' において位置 $X(t) = R$ で静止し続けることができる。この条件を Ω , M , R , m , C , G のうち必要なものを用いて書き表せ。

4-1-6. 以下の問では、 Ω が問 4-1-5. で求めた条件を満たすとする。位置 $X(t) = R$ の付近における粒子の運動を考えるため、新たな座標 $q(t) = X(t) - R$ を導入する。 $|q(t)|$ が R に比べて十分に小さいと仮定し、問 4-1-4. で求めた方程式を $q(t)$ の 1 次までの量で近似することで、 $q(t)$ の満たすべき線形な微分方程式を求めよ。

4-1-7. $X(t) = R$ の付近における粒子の運動の定性的な振る舞いを、(i) $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ と (ii) $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ の場合に分けてそれぞれ簡潔に議論せよ。

- 4-2. 熱力学的な系において、ある熱平衡状態の内部エネルギー、エントロピー、体積がそれぞれ E, S, V であり、これに非常に近い熱平衡状態の内部エネルギー、エントロピー、体積がそれぞれ $E + dE, S + dS, V + dV$ であるとする。このとき dE, dS, dV の間には次の関係が成り立つ。

$$TdS = dE + PdV$$

T は温度、 P は圧力である。これを用いて、以下の関係式を示せ。 F は Helmholtz 自由エネルギー $F = E - TS$ を表す。

$$(a) \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_V$$

$$(b) \frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_E$$

$$(c) S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$$

$$(d) P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$$

$$(e) \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

- 4-3. 体積 V の領域に閉じ込められた粒子数 N ($\gg 1$) の古典統計に従う気体がある。この気体は温度 T の熱平衡状態にあるとし、粒子はそれぞれ独立でかつ個別性は認められないとする。粒子 1 個のエネルギー ε は運動量の大きさ p に比例し、 $\varepsilon = ap$ (a は定数) で与えられるとする。以下の問に答えよ。必要に応じて問 4-2. の関係式を既知として用いてよい。また、以下の問に現れる k はボルツマン定数、 h はプランク定数、 $\ln$ は自然対数、 e は自然対数の底を表す。

4-3-1. この系の分配関数 Z を T, V, N, a, k, h を用いて書き表せ。

4-3-2. この気体の Helmholtz 自由エネルギー $F = -kT \ln Z$ (Z は分配関数) から圧力 P を求めよ。Stirling の公式 $\ln N! = N \ln(N/e)$ を用いること。

4-3-3. この気体の内部エネルギー E を求めよ。

筆答専門試験科目（午後）

2020 大修

地球惑星科学

時間 13:30～16:00

注 意 事 項

1. 以下の4問（5～8）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の答案用紙に記入せよ。1問につき答案用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各答案用紙に必ず問題番号（5～8）及び受験番号を記入せよ。

[5] 設問に解答せよ。

- 5-1. 光の波長 (λ) を振動数 (ν) とエネルギー (E) に換算した表 1 の (ア), (イ) に入る適切な数値を有効数字 2 桁で答えよ。ただし, 光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $1 \text{ J} = 6.2 \times 10^{18} \text{ eV}$ とする。

表 1

λ (μm)	ν (Hz)	E (eV)
1.0	(ア)	(イ)

- 5-2. X 線回折実験から結晶性鉱物の格子定数の情報を得たい。実験に使用する X 線のエネルギーはおよそ何 eV が適切か, 根拠とともに 3 行以内で答えよ。

- 5-3. イオンが剛体球であると仮定し, これらを体心立方格子, 面心立方格子, 六方最密充填構造上に並べることを考える。それぞれ 3 つの構造を解答用紙に図示し, 各構造におけるイオンの配位数 (最隣接格子点数) および充填率をそれぞれ求めよ。充填率は有効数字 2 桁の % 表記で答えること。

- 5-4. 格子の 1 辺が a の立方晶系の結晶の (hkl) 面の面間隔 d_{hkl} は $\frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$ であることを示せ。

- 5-5. 体心立方構造の鉄 (α 鉄) に対して X 線回折測定を行ったところ, 表 2 のように 5 本の回折線が得られた。回折線は面間隔 d_{hkl} に換算してあり, 一部の回折線については回折を起こした結晶面のミラー指数 $\{hkl\}$ が示されている。

表 2

$\{hkl\}$	d_{hkl}
110	2.027
①	1.433
②	1.170
③	1.013
310	0.906

- 5-5-1. 実験で得られた α 鉄試料の 2 次元 X 線回折パターンは切れ目のないデバイーシェラー環を示した。用いた α 鉄試料の結晶状態を粒径と結晶方位という 2 つの語句を用いて 2 行以内で答えよ。

5-5-2. 表2の中の①～③の回折線のミラー指数をそれぞれ答えよ。

5-5-3. 表2および問5-4で示した式を用いて α 鉄の格子定数 $a(\text{\AA})$ を有効数字4桁で求めよ。

5-6. 物質のX線吸収に関する以下の設問に答えよ。

5-6-1. 入射強度 I_0 のX線を試料に照射すると、透過したX線の強度は I であった。その試料のX線透過率(I/I_0)はLambert-Beerの法則に基づき、試料のX線質量吸収係数(μ)、密度(ρ)、X線が透過した試料の厚さ(l)で表現することが出来る。その関係式を書け。

5-6-2. 一辺が $10\text{ }\mu\text{m}$ の α 鉄の立方体の面に垂直な方向から 10 keV のX線を照射したところ、 I/I_0 は 0.2 であった。このときの α 鉄のX線質量吸収係数 $\mu\text{ (cm}^2\cdot\text{g}^{-1}\text{)}$ を有効数字4桁で求めよ。計算過程も記述すること。なお、X線の集光面は α 鉄立方体の面にもれなく照射されている。ただし、鉄の原子量は 55.8 、アボガドロ数は $6.0\times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$ を用いよ。必要な場合は問5-3、5-5の答え、及び $\ln(0.2)=-1.6$ を用いてもよい。

5-7. 上記のX線回折法、吸収法以外のX線を用いた物質分析手法の原理を地球惑星科学的な研究への応用例とともに5行以内で答えよ。

[6] アメリカ西部の地形を示した図1を参照し、以下の問いに答えよ。

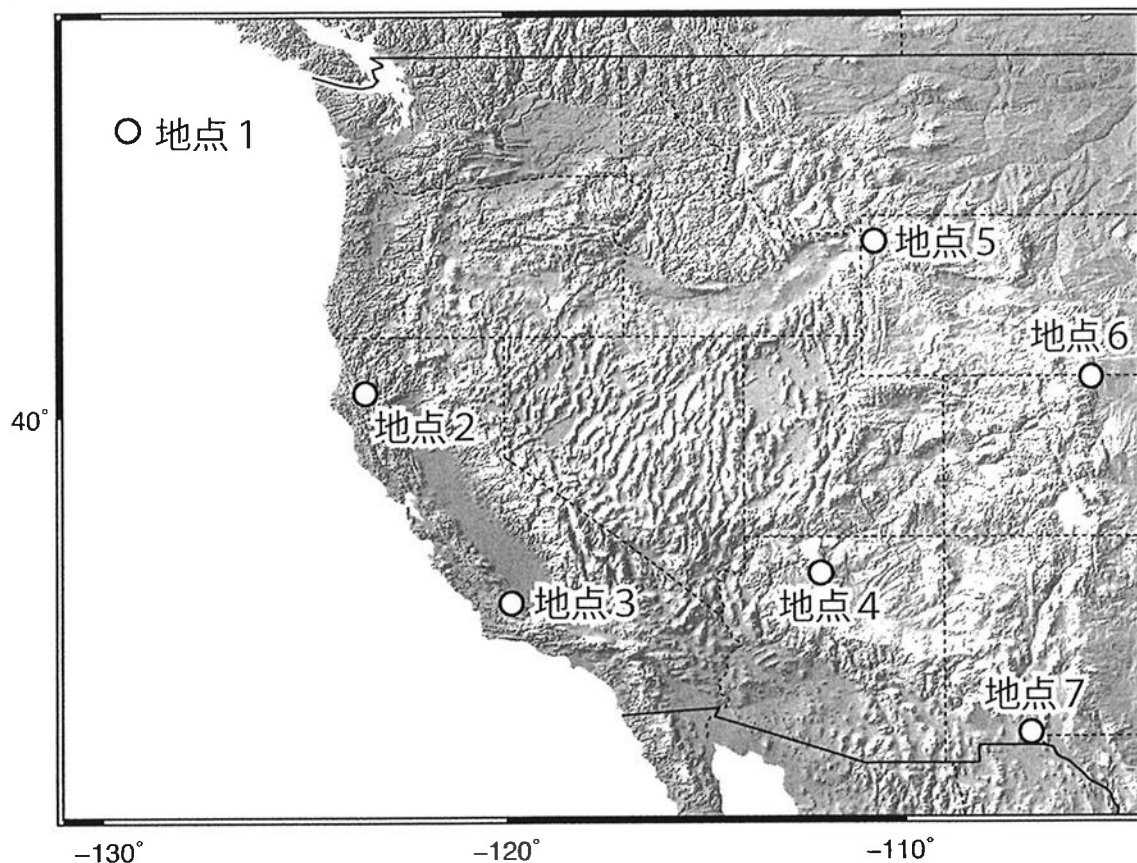


図1 アメリカ西部の地形図

- 6-1. ワシントン州西方沖にはファンデフカプレートと呼ばれる小さな海洋プレートが存在している。西側の太平洋プレートとの境界である地点1は、プレートテクトニクス理論の基礎の一つとなった海底拡大説を裏付ける観測がなされた場所である。どのような観測事実をもとに海底拡大説が実証されるに至ったか3行以内で説明せよ。
- 6-2. ファンデフカプレートの東縁は収束境界となっており、北アメリカ大陸プレートと接している。北アメリカ大陸プレートに対し、太平洋プレートが西向きに $4 \text{ cm} \cdot \text{year}^{-1}$ の速度で移動しており、ファンデフカプレートが東向きに $6 \text{ cm} \cdot \text{year}^{-1}$ の速度で沈み込んでいるとした場合、(1) 地点1の拡大軸における片側拡大速度、(2) 拡大軸の移動方向、(3) 北アメリカ大陸プレートに対する拡大軸の速度、をそれぞれ求めよ(単位は $\text{cm} \cdot \text{year}^{-1}$ とする)。ただし、地点1での拡大は両側対称になっているとする。
- 6-3. 地点2に分布する玄武岩や砂岩は、プレートの沈み込みに伴い深部に運ばれた結果、図2の矢印で示されている温度圧力条件下で変成作用を受け、その後地表付近まで上昇したと考えられている。変成相区分図に示されている反応曲線(空欄 a~f)に当てはまる適切な鉱物名を語群から選んでそれぞれ答えよ。また鉱物cと鉱物dの組成式を記せ。

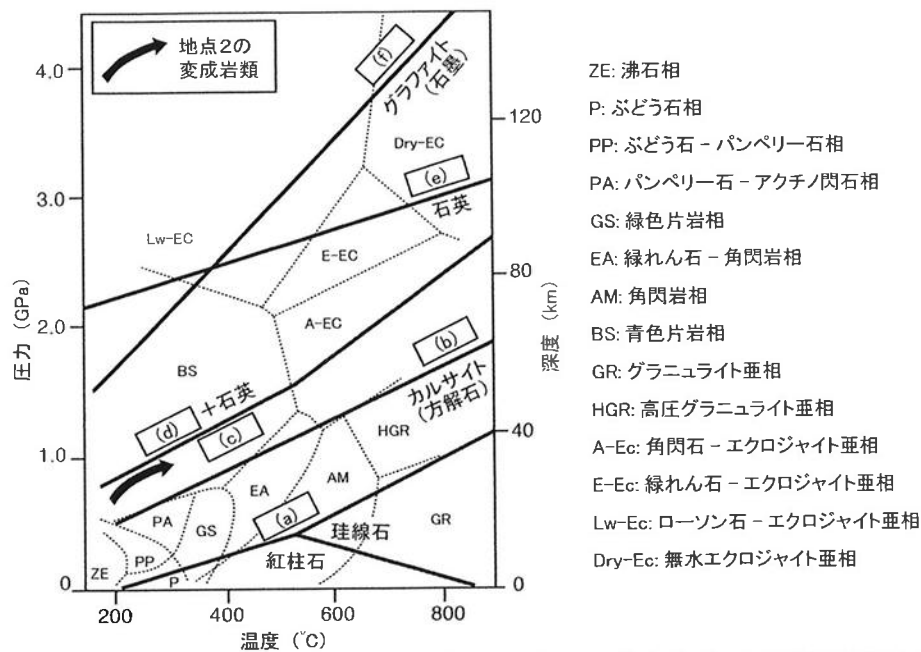


図2 変成相区分図 (Liou et al., 1998) と地点2に分布する変成岩類が記録する温度圧力条件 (Terabayashi and Maruyama, 1998)

語群

かんらん石, 斜方輝石, 透輝石, スピネル, ひすい輝石, 曹長石, 灰長石, 磁鉄鉱, イルメナイト, ドロマイト, アラゴナイト (あられ石), 藍閃石, 緑泥石, 藍晶石, 堇青石, 十字石, コース石, スティショバイト, ダイヤモンド, ウォズレライト

- 6-4. カリフォルニア州北西部から南部に渡って続く, サンアンドレアス断層が露出する地点3では, 断層運動により図3のような河川の下流域に折れ曲がりが生じており, その変位量と放射性炭素年代測定から過去3700年における断層の平均変位速度が年間およそ35 mmと見積もられている. 放射性炭素年代測定法の原理を説明し, 本地域でどのような試料の年代測定結果から平均変位速度が算出されているのか答えよ (10行以内で記述).

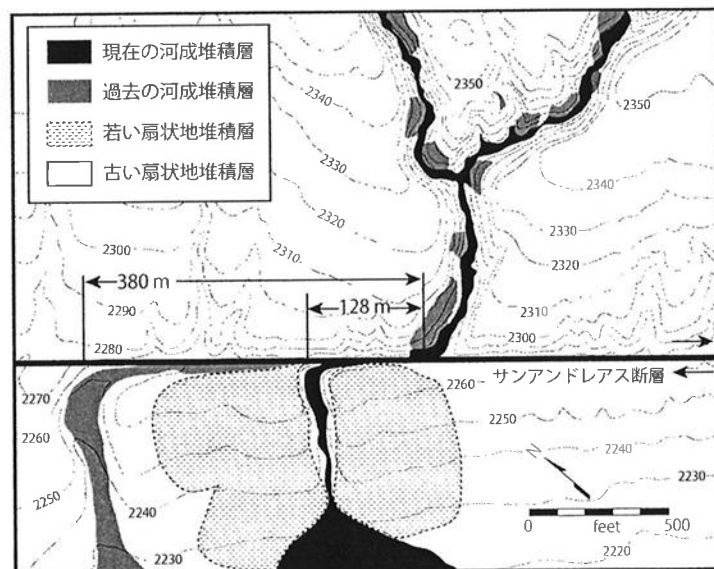


図3 サンアンドレアス断層が地表に露出する地点3の地質図 (Sieh and Jahns, 1984 を一部改変)

6-5. グランドキャニオンと呼ばれる大峡谷である地点 4 の断崖には、原生代の基盤岩から古生代末にいたる地層が連続的に露出している。ペルム紀前期のトロウィーブ層、カンブリア紀前期のタピーツ砂岩層は、それぞれみかけの磁北が (46°N , 125°E) , (5°N , 170°E) を示す残留磁化を記録しており、アメリカ大陸が移動した結果を反映している。一方、大西洋拡大以前のヨーロッパが北アメリカ大陸プレートの一部であった場合、ヨーロッパの岩石に記録されている古地磁気極を予測することができる。大西洋の拡大を以下のように近似し、ヨーロッパ産のペルム紀前期、カンブリア紀前期の岩石が記録するみかけの磁北の緯度経度をそれぞれ求めよ。ただし計算にあたっては、地球の半径を 6400 km 、円周率 π を 3.14 とし、途中経過も示すこと。

- (1) 1 億 7000 万年前に拡大が開始した。
- (2) 大西洋の拡大は、地球の自転軸をまわる回転運動で表される。
- (3) 現在まで赤道線上における両側拡大速度が $2.5\text{ cm} \cdot \text{year}^{-1}$ のまま拡大が進行した。

6-6. 噴火口跡の軌跡からホットスポット火山であることがわかる地点 5 は、巨大カルデラ形成を伴う破局的噴火が約 210 万年前以降 3 回起きている。いずれも放出された火山噴出物の大半は流紋岩質であるが、玄武岩質噴出物も数%程度存在する。また地点 5 の流紋岩質噴出物は、玄武岩質噴出物と比べて著しく高い Sr 同位体比や Pb 同位体比を示す。これらの観察や造構場を踏まえ、地点 5 の流紋岩質マグマ形成過程を説明せよ (5 行以内で記述)。

6-7. 太古代ワイオミング地塊の南縁に位置する地点 6 では、1980 年代にダイヤモンドやざくろ石かんらん岩捕獲岩を含むキンバーライトパイプが多数発見され、アメリカ合衆国初のダイヤモンド鉱山として開発された。一方、大陸リフト帯であるリオグランデ地溝帯の中軸に位置する地点 7 では、約 8 万年前の単成火山の噴火により大量のスピネルかんらん岩捕獲岩が地表にもたらされたが、ざくろ石かんらん岩は認められない。スピネルかんらん岩がざくろ石かんらん岩に変化する化学反応式を示し、両地点で見つかるかんらん岩の種類が異なる理由について造構場を踏まえて 5 行以内で説明せよ。ただし、岩石に含まれる Cr や Fe は無視できるものとし、反応には岩石中に含まれる単斜輝石は関わらないとする。

[7]

7-1. 電荷 $+q, -q$ (ただし $q > 0$) をもつ2つの荷電粒子からなる電気双極子を考える。正負の荷電粒子の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_+, \mathbf{r}_-$ としたとき、ベクトル $\mathbf{p} = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$ を電気双極子のモーメントと呼ぶ。以下の問では、電気双極子の置かれる空間は真空であるとし、真空の誘電率を ϵ_0 とおく。

7-1-1. 原点近傍にある電気双極子が、原点から離れた位置 $\mathbf{R}$ につくる電位 (静電ポテンシャル) を $\phi(\mathbf{R})$ とする。 $|\mathbf{r}_+|, |\mathbf{r}_-|$ が $|\mathbf{R}|$ に比べて微小であると仮定し、 $\phi(\mathbf{R})$ を $\mathbf{r}_+, \mathbf{r}_-$ の成分の1次までの精度で評価すると、

$$\phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \quad (1)$$

と書くことができることを示せ。

7-1-2. 多数の電気双極子が、閉じた空間領域 V に広がっているとする。 V の中の位置 $\mathbf{r}$ にある単位体積に含まれる電気双極子のモーメントの和を、 $\mathbf{r}$ に依存するベクトル $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ で表すことにする。式(1)の一般化より、この電気双極子の集団が位置 $\mathbf{R}$ につくる電位 $\Phi(\mathbf{R})$ は、以下の体積分

$$\Phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} dV \quad (2)$$

で表せることがわかる。ここで、体積分の変数は $\mathbf{r}$ の成分であることに注意せよ。

一方、電気双極子の集団を、 V およびその表面 S に連続的に広がった電荷であるとみなせば、 $\Phi(\mathbf{R})$ は以下のように書くこともできるだろう。

$$\Phi(\mathbf{R}) = \int_V \psi_V(\mathbf{r}, \mathbf{R}) dV + \int_S \psi_S(\mathbf{r}, \mathbf{R}) dS \quad (3)$$

ここで、 $\psi_V(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ は V 中の位置 $\mathbf{r}$ にある単位体積に含まれる電荷が位置 $\mathbf{R}$ につくる電位、 $\psi_S(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ は S 上の位置 $\mathbf{r}$ にある単位面積に含まれる電荷が位置 $\mathbf{R}$ につくる電位を表す。式(2)を式(3)の形に書き換えられることを示すため、以下の問(a)–(c)に答えよ。

(a) V 中の電荷密度を $\rho(\mathbf{r})$, S 上の電荷面密度を $\sigma(\mathbf{r})$ とする。 $\psi_V(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ および $\psi_S(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ を、 $\epsilon_0, \rho(\mathbf{r}), \sigma(\mathbf{r}), \mathbf{r}, \mathbf{R}$ のうち必要なものを用いて書き表せ。

(b) $\mathbf{r}$ に関するナブラベクトルを ∇ , 任意のベクトル場を $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ とする。 $\mathbf{R}$ を定数ベクトルとみなして発散 $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{A}(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \right)$ を計算し、結果を $\mathbf{A}(\mathbf{r}), \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{r}, \mathbf{R}$ を用いて書き表せ。

(c) 式(2)を式(3)の形に書き換えると、問(a)で定義した $\rho(\mathbf{r}), \sigma(\mathbf{r})$ が $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ と関係することがわかる。 $\mathbf{M}(\mathbf{r}), \nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r})$, および S の外向きの法線ベクトル $\mathbf{n}$ のうち必要なものを用いて、 $\rho(\mathbf{r})$ および $\sigma(\mathbf{r})$ を書き表せ。

7-1-3. V 中にある電荷の総量を Q_V , S 上にある電荷の総量を Q_S とする。電気双極子の集団は全体として電氣的に中性であるから, $Q_V + Q_S = 0$ となるはずである。問 7-1-2.(c) の結果を用いて, $Q_V + Q_S = 0$ が実際に成り立つことを示せ。

7-2. 単一種の単原子分子からなる気体を考える。個々の気体分子の位置と速度はデカルト座標を用い、位置 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, 速度 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ で表す。 $dx_1, dx_2, dx_3, du_1, du_2, du_3$ を正の微小量とすると、時刻 t において位置が (x_1, x_2, x_3) から $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ の範囲にあり、速度が (u_1, u_2, u_3) から $(u_1+du_1, u_2+du_2, u_3+du_3)$ の範囲にある粒子の数 dN は、分布関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ を用いて次のように表される。

$$dN = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dx_1 dx_2 dx_3 du_1 du_2 du_3$$

分布関数 f は $\mathbf{x}, \mathbf{u}, t$ を独立変数とする関数である。また、分布関数 f は次のボルツマン方程式に従って時間変化する。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m} F_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \quad (4)$$

ここで、 m は気体分子1個の質量、 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ は外部から作用する力、 $(\partial f / \partial t)_{\text{coll}}$ は衝突項である。次の各問に答えよ。

7-2-1. 時刻 t , 位置 $\mathbf{x}$ における気体の数密度 $n(\mathbf{x}, t)$ は、次式で与えられる。

$$n(\mathbf{x}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \boxed{(a)} du_1 du_2 du_3 \quad (5)$$

また、物理量 $q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ の時刻 t , 位置 $\mathbf{x}$ における平均値 $\langle q \rangle$ は、次式で求められる。

$$\langle q \rangle = \boxed{(b)} \times \iiint_{-\infty}^{\infty} \boxed{(c)} du_1 du_2 du_3 \quad (6)$$

上記の空欄 (a), (b), (c) に入る適切な式を記せ。

7-2-2. ある種の運動では衝突項が無視でき、 $(\partial f / \partial t)_{\text{coll}} = 0$ とみなせる。また、外場は存在せず $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ とする。この場合に対し、以下の問に答えよ。

7-2-2-1. 式 (4) の両辺に m をかけて全速度空間について積分することにより、質量保存を表す連続の式 (7) が得られることを示せ。ただし、 $\rho = nm$, $\mathbf{V} = \langle \mathbf{u} \rangle$ である。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (7)$$

7-2-2-2. 式 (4) に mu_i ($i = 1, 2$, または 3) をかけて全速度空間について積分し、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \langle u_i \rangle) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \langle u_i u_j \rangle) = 0 \quad (8)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{u} - \mathbf{V}$ を用いてテンソル P_{ij} を次のように定義する。

$$P_{ij} = \rho \langle (u_i - V_i)(u_j - V_j) \rangle \quad (9)$$

すると、テンソル P_{ij} は、

$$P_{ij} = \rho \langle u_i u_j \rangle - \boxed{(d)} \quad (10)$$

と変形することができ、式 (8) は、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial [e]} \left([f] \right) = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \quad (11)$$

と書き換えられる。さらに、式 (11) と式 (7) より、次の形の運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 [g] \frac{\partial V_i}{\partial [h]} = - \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \quad (12)$$

上記の空欄 (d), (e), (f), (g), (h) に入る適切な式を記せ。

- 7-3. ある湖の水が、最初、静止している。この湖の底面は固体で動かず、平らで水平で、深さ $H(>0)$ と比較して無限に広いと見なせる広がりを持っている。鉛直上向きに x_3 軸をとり、湖底の位置を $x_3 = 0$ とする。また、水平方向に x_1 軸と x_2 軸をとる。無限に広いと見なせる平らな板を水面上に水平に置き、 x_1 軸の正の方向に一定の速さ V_0 で動かし続ける。板は変形しないとし、板の質量は無視する。しばらくすると、湖内の水は定常的な流れに落ち着き、湖内の位置 x における流体の速度は $V(x) = (V_1(x), V_2(x), V_3(x))$ となった。この流れは層流で、境界層は無視できるとする。この定常流について考える。

湖水は密度 ρ と粘性係数 η を持つ粘性流体で、 ρ と η は定数と見なす（非圧縮性粘性流体）。非圧縮性粘性流体の運動方程式は、次のように書ける。

$$\frac{DV_i}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + K_i \quad (13)$$

ここで、 D/Dt は $[ア]$ と呼ばれる微分であり、 p は圧力、 $K = (K_1, K_2, K_3)$ は単位 $[イ]$ あたりの流体に働く外力である。また、 τ_{ij} は j 軸に垂直な単位面に作用する i 軸方向の粘性力を表す粘性応力テンソルで、次式で表される。

$$\tau_{ij} = \eta \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (14)$$

粘性流体では運動エネルギーが熱エネルギーに変換される。単位時間、単位体積あたりに生じる熱エネルギー ϵ は、次式で求められる。

$$\epsilon = \frac{1}{2} \eta \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (15)$$

7-3-1. 文中の空欄 (ア) と (イ) に当てはまる適当な語句を記せ。

7-3-2. 式 (13) の右辺第 2 項は、次のように変形できることを示せ。

$$\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\eta}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2}$$

7-3-3. この定常流では、 $V_2 = V_3 = 0$ となる。板に作用する大気圧が p_0 、この系に作用している重力加速度の大きさを g とし、湖内の流体の圧力 p を x_3 の関数として求めよ。

7-3-4. 粘性流体では、固体と接触している境界において流体の速度は固体の速度に一致する。よって、この定常流の $x_3 = 0$ と $x_3 = H$ における x_1 方向の速さ $V_1(0)$ と $V_1(H)$ は、 $V_1(0) = 0$ 、 $V_1(H) = V_0$ である。また、この定常流では流体内の水平方向には圧力勾配がない。これらのことに注意し、定常流の x_1 方向の速さ V_1 を x_3 の関数として求めよ。

7-3-5. 湖面上の板を x_1 の正の方向に一定速度 V_0 で動かし続けるためには、力を加え続ける必要がある。単位面積あたりの板に加えるべき力の大きさ f と力の向きを求めよ。

7-3-6. 湖面上の板が流体に対しておよぼす単位面積あたりの仕事率 W と、単位時間、単位体積あたりに湖内で発生する熱エネルギー ϵ との間の関係について述べよ。

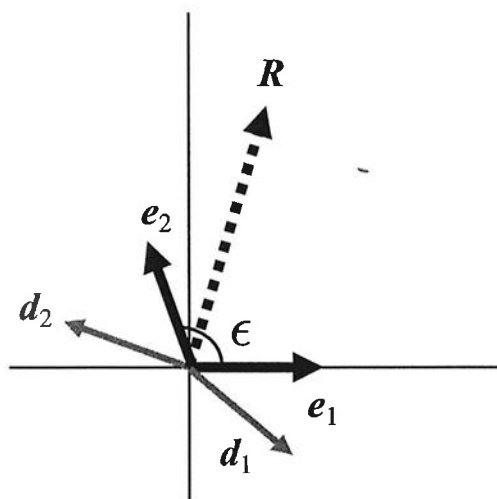
[8]

8-1. 2次元ベクトル空間 V において, $\Gamma_e = \{e_1, e_2\}$, $\Gamma_d = \{d_1, d_2\}$ を任意の2つの基底とする。ただし, e_1, e_2, d_1, d_2 の大きさは1である。また, $\{d_1, d_2\}$ と $\{e_1, e_2\}$ の関係は, 4つの実数 $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ を用いて,

$$d_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 \quad (1)$$

$$d_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 \quad (2)$$

と表せるとする。さらに, e_1 と e_2 がなす角を ϵ とする。(下図参照)



次の各問に答えよ。

8-1-1. ベクトル空間内のあるベクトル R は, 基底 $\Gamma_e = \{e_1, e_2\}$ を使うと,

$$R = p_1e_1 + p_2e_2 \quad (3)$$

と表せ, 基底 $\Gamma_d = \{d_1, d_2\}$ を使うと,

$$R = q_1d_1 + q_2d_2 \quad (4)$$

と表せるので, その成分はそれぞれ $R = (p_1, p_2)$ および $R = (q_1, q_2)$ と書くことができる。

各基底を用いた成分表示の相互の変換は,

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

を満たす行列 U で表すことができる。この行列 U の成分 u_{ij} ($i, j = 1, 2$) を, c_{ij} ($i, j = 1, 2$) を用いて表せ。

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

8-1-2. ベクトル R と e_1, e_2 との内積を ζ_1, ζ_2 とする。

$$\zeta_1 = R \cdot e_1, \quad \zeta_2 = R \cdot e_2 \quad (6)$$

基底 Γ_e を用いたときの R の成分 (p_1, p_2) と (ζ_1, ζ_2) の間の関係は、次の形で表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

この行列 G の成分 g_{ij} ($i, j = 1, 2$) を求めよ。

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

8-1-3. 前問 8-1-2. で得られた行列 G は、逆行列を持つことを示せ。

8-1-4. 基底 Γ_e, Γ_d がいずれも正規直交基底であるとする。このとき、 c_{11} を c とおくと、変換行列 U の成分は c のみを用いて表すことができる。実数 c の値の範囲を示すと共に、変換行列 U の成分を c を用いて表せ。また、 U の行列式を求めよ。

8-2. 関数 $f(t)$ と $g(t)$ の畳み込み積分 $K(\omega)$ を以下のように定義する。

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\omega - t)dt \quad (-\infty < \omega < \infty) \quad (8)$$

$f(t)$, $g(t)$ をそれぞれ以下の関数とすると、 $K(\omega)$ を求めよ。必要に応じて図を用いて解答してよい。(a) については、 $\int_0^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を用いてよい。

(a) $f(t) = \exp(-\alpha t^2)$, $g(t) = \exp(-\beta t^2)$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$

(b)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq W_1) \\ 0 & (|t| > W_1) \end{cases}, \quad g(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq W_2) \\ 0 & (|t| > W_2) \end{cases} \quad (\text{ただし } 0 < W_1 < W_2)$$

8-3. 複素数 $z = x + iy$ を表す複素平面における領域 D で定義された複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が、 D 内の点 (x_0, y_0) で微分可能であるための必要十分条件は、 u , v が (x_0, y_0) において全微分可能でかつ次式を満たすことである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

$z = re^{i\theta}$ とすると、式 (9) は次のように書けることを示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (10)$$

8-4. z , w を複素数とする。 $w = \phi + i\psi$ の複素平面から $z = x + iy$ の複素平面への写像関数 $z = e^w$ によつて、 w 平面上の直交する直線群 $\phi = \alpha$, $\psi = \beta$ (α, β は任意の実数) は z 平面上のどのような曲線群に写されるか。式を示し、概略を図示せよ。また、 z 平面上で曲線群 $\phi(x, y) = \alpha$ と $\psi(x, y) = \beta$ とが原点を除く任意の点で直交することを示せ。必要に応じて問 8-3. の式 (9), (10) を既知として用いてよい。