

筆答専門試験科目（午前）
地球惑星科学系

2023 大修

時間 9:30～12:00

注 意 事 項

1. 以下の4問（1～4）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各解答用紙には必ず問題番号（1～4）および受験番号を記入すること。

- [1] 下の表は、それぞれの化合物について、標準生成ギブズエネルギー ΔG_f° 、標準生成エンタルピー ΔH_f° 、および標準エントロピー S° をまとめたものである。ここで、標準状態は 25°C、1 atm である。次の各問に答えよ。ただし、必要なら気体定数 $R = 8.31 \text{ [J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}]$ 、 $\log 2 = 0.301$ および $\ln X = 2.30 \log X$ の関係を用いること。

	ΔG_f° [kJ mol ⁻¹]	ΔH_f° [kJ mol ⁻¹]	S° [J K ⁻¹ mol ⁻¹]
CO ₂	-394.4	-393.5	213.7
CO	[A]	-110.5	197.6
C	0	0	5.7
CH ₄	[B]	-74.8	186.3
H ₂ O	-228.5	-241.8	188.7
H ₂	[C]	0	130.6
O ₂	0	[D]	205.1

1-1. 表の[A]、[B]、[C] および [D] に入る数値をそれぞれ答えよ。

1-2. 密閉された容器の中に同じ物質量の CO と H₂O を封入し、以下の反応 1 が進行したとする。



1-2-1. 反応 1 の標準反応エンタルピー ΔH° 、標準反応エントロピー ΔS° および標準反応ギブズエネルギー ΔG° をそれぞれ答えよ。

1-2-2. 反応 1 が化学平衡に達したとき、封入した CO に対する反応後に残った CO の割合(残存比率)を f とする。反応 1 の平衡定数 K と f との関係式を示せ。

1-2-3. 封入した CO の 80% が CO₂ に変換され、化学平衡に達したとする。このときの温度は何 K であるか答えよ。ただし、 ΔH° および ΔS° の温度依存性は無視できるとする。

1-3. 次の反応 2 が 500 K で化学平衡にあるとする。



温度を 600 K に上昇させると平衡は左右どちらに移動するか答えよ。ただし理由も述べること。

1-4. メタン生成菌は一連の酵素反応によって CO₂ を CH₄ に変換することでエネルギーを得ている。このとき、¹³CO₂ の反応速度は ¹²CO₂ よりもわずかに遅く、それら反応速度定数の比($\alpha = k^{13}/k^{12}$)は 0.95 であるとする。

1-4-1. この微生物反応によって消費された CO₂ の残存比率を f とする。このとき、反応後の CO₂ の炭素同位体比($R = {}^{13}\text{C}/{}^{12}\text{C}$)と、反応前の CO₂ の炭素同位体比(R_0)の関係式を α と f を用いて導出せよ。

1-4-2. 閉鎖空間において、このメタン生成菌が CO₂ の 80% を消費したとき、反応前後の CO₂ の炭素同位体比の変化 $\ln(R/R_0)$ はいくらか答えよ。

[2] 図を参照し、以下の設問に答えよ。

- 2-1. 図 1 は地球の標高と水深のヒソグラフ曲線と呼ばれ、縦軸は高度を、横軸は、その高度以上の部分が占める面積(地球表面全体に対する割合%)を表している。このヒソグラフ曲線を基に、地殻表面の高度の頻度分布を大まかに図示せよ。ただし、横軸を高度、縦軸を頻度とし、図中に次の 4 点を明示すること。

[a: 最深地点, b: 海洋の平均水深, c: 陸地の平均標高, d: 最高地点]

- 2-2. 現在、地球表面のおよそ 70% は海に覆われている。(1)もし大陸面積が 10% 増加した場合、海水準はどのくらい上昇するか。また、(2)大陸上に存在する $3.0 \times 10^7 \text{ km}^3$ の氷床が全部溶けて海洋に加わった場合、海水準はどのくらい上昇するか、それぞれ答えよ。ただし、地殻表面の高度分布を単純化し、海水準上昇前の海洋底の深さは 3500 m、大陸の標高は 800 m で一様であると仮定してそれぞれ計算すること。また、地球の表面積は $5.1 \times 10^8 \text{ km}^2$ 、氷の海水に対する比重は 0.92 とする。

- 2-3. 海洋底はプレートの冷却とともに深くなり、その深度は一般に海洋プレート年齢の平方根に比例する。しかし、海洋プレートが誕生する中央海嶺の水深は、共通してほぼ 2600 m であり、地球表面の 10% 程度は中央海嶺より浅い海域となっている。この浅い海域を占める部分は、地質学的にどのような造構場であるか、主要な二つについてそれぞれ 3 行程度で説明せよ。

- 2-4. 中央海嶺の深さが炭酸塩補償深度よりも深い場合、誕生から沈み込むまでの間に海洋プレート上にはどのような層序が形成されるか 5 行以内で説明せよ。ただし、海溝で沈み込む直前の海洋地殻最上部の模式柱状図を示すこと。

- 2-5. 図 2 の空欄(A) ~ (I)に当てはまる地質時代の名称を、JIS に定められた日本語表記あるいは、国際地質科学連合(IUGS)に定められた英語表記のいずれかで答えよ。

- 2-6. 大陸上に残された堆積岩の研究によると、およそ 8000 万年前の海水準は、現在と比べて 250 m ほど高かったと考えられている(図 2)。当時の海水準が高かった要因を 2 つ答えよ(あわせて 3 行以内)。

- 2-7. 地球史のような長いタイムスケールで考えた場合、過去 5 億 4 千万年間の気候は炭素循環に伴う負のフィードバック機構により比較的安定していたと考えられている。このフィードバック機構について 5 行以内で説明せよ。ただし、次の 4 つの語句を全て用いること。

[温室効果・珪酸塩鉱物・炭酸塩鉱物・風化]

- 2-8. 図 3 は足尾山地周辺の地質図である。a-a'に沿う大まかな地質断面図を図示せよ。

- 2-9. 図 3 には、足尾帯の一部を構成する葛生コンプレックスの層序が示されている。この層序は、それぞれの岩相に含まれる示準化石に基づいて復元されたものである。どのような化石が示準化石として用いるのに適しているか、その生物の特徴を 2 つあげよ。また、(D)の年代のチャートと(E)の年代の石灰岩に含まれる代表的な示準化石の名称をそれぞれ答えよ。

- 2-10. 図 3 の地質概略図および復元された層序をもとに、この地域の構造発達史を 5 行以内で説明せよ。ただし、(A)~(E)の地質時代の名称と次の語句を全て用いること。

[堆積・付加・貫入・噴出]

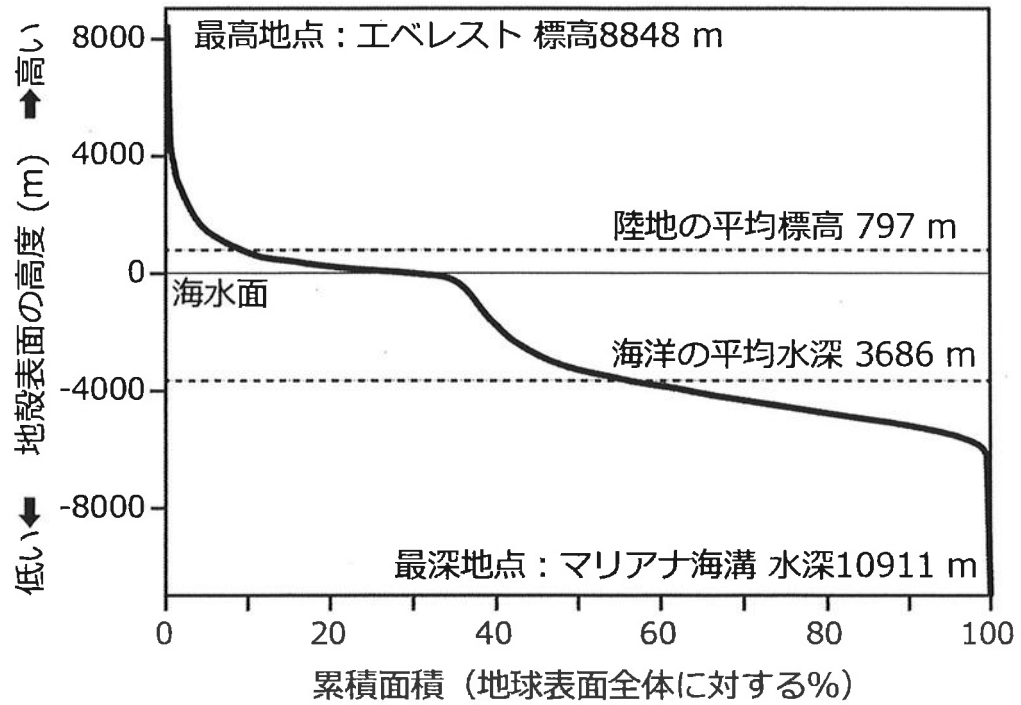


図 1: 地殻表面の平均海水面に対する標高と深度の累積頻度を表すヒプソグラフ曲線 (Amante and Eakins, 2009 に基づく)。

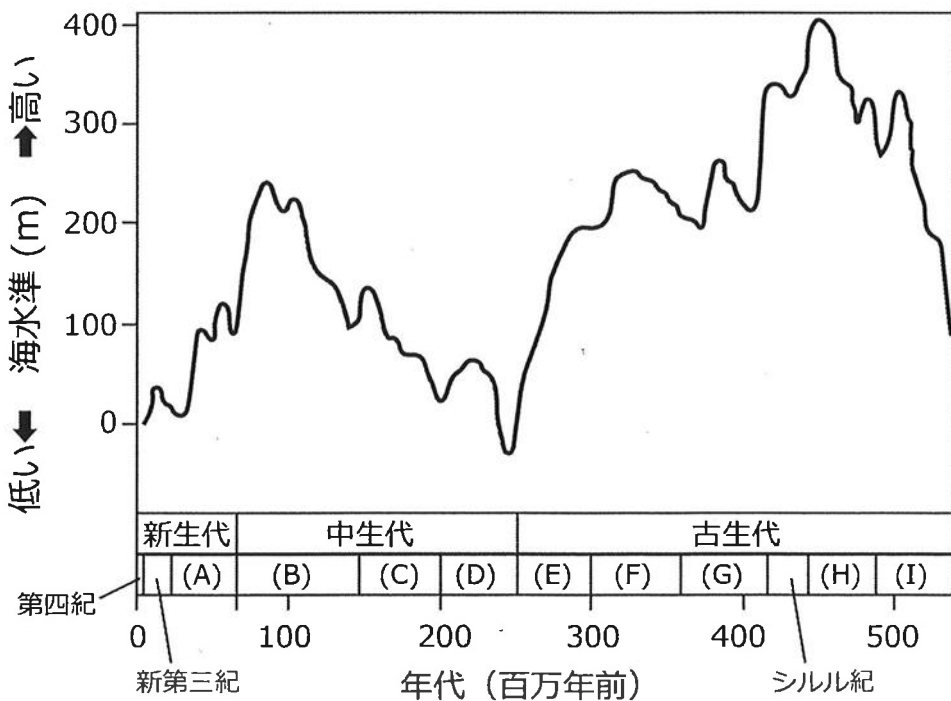


図 2: 堆積学的研究から推定された過去の海水準変動 (Hallam, 1992 に基づく)。

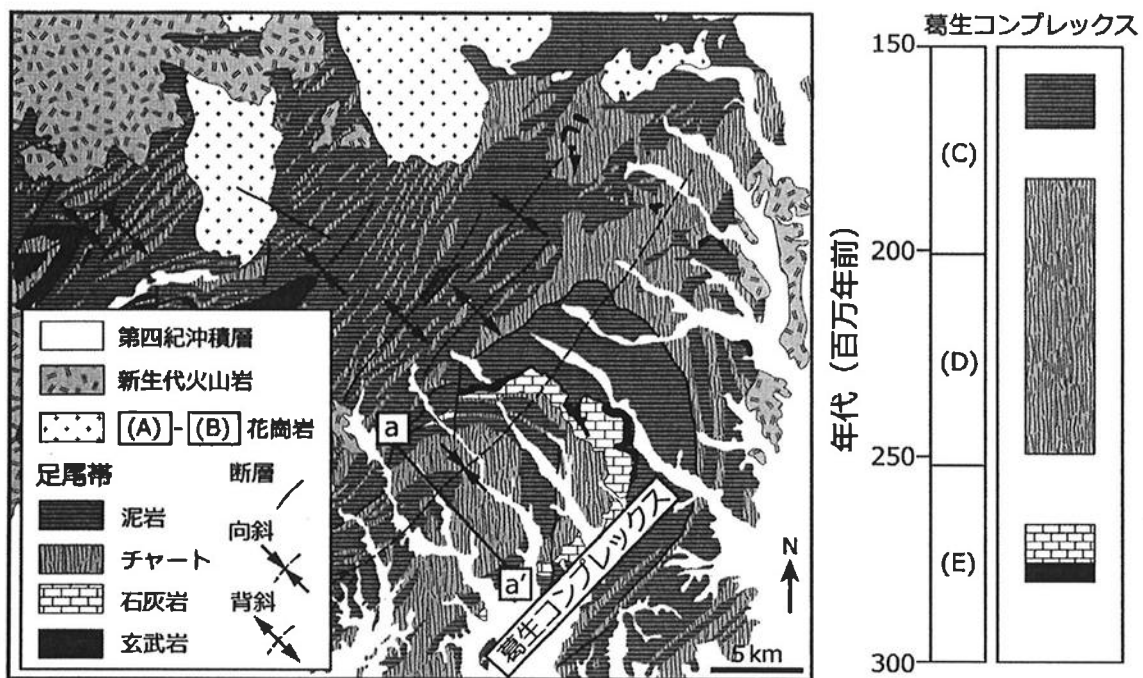


図 3: 足尾山地周辺の地質図と足尾帯・葛生コンプレックスで復元された層序(Ito, 2021 を簡略化)。
 なお図中の(A)~(E)は図 2 と同じ地質時代を表す。

[3]

3-1. x を独立変数, y を 2 階微分可能な x の実関数とする。以下の問に答えよ。

3-1-1. 次の 2 つの微分方程式を, 与えられた初期条件のもとでそれぞれ解け。

(a)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1$$

(b)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1$$

3-1-2. 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

の一つの解を y_1 とする。 $P(x)$, $Q(x)$ は x を独立変数とする実関数である。微分方程式の他の線形独立な解 y_2 が, x の実関数 $u(x)$ を用いて $y_2 = y_1 u(x)$ と表せるとき, $u(x)$ を求めよ。結果は次の形で表し, 空欄 (ア) にあてはまる式を答えよ。ただし, 空欄 (ア) には積分記号は含まれない。

$$u(x) = a \int^x \left\{ \frac{1}{\boxed{\text{(ア)}}} \exp \left(- \int^{x_2} P(x_1) dx_1 \right) \right\} dx_2 + b \quad (a, b \text{ は任意定数})$$

3-1-3. 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

3-2. p と q を正の実数として、ガンマ関数 $\Gamma(p)$ とベータ関数 $B(p, q)$ はそれぞれ以下のよう
に表される。

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (1)$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (2)$$

以下の設問に答えよ。ただし、以下の設問において n は自然数とする。

3-2-1. $\Gamma(1) = 1$ を示し、 $\Gamma(n+1) = n!$ が成り立つことを示せ。

3-2-2. 次式で定義される定積分 $I(n)$ をベータ関数を用いて表せ。

$$I(n) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx \quad (3)$$

3-2-3. 定積分 $I(n)$ が以下になることを示せ。ただし、途中の導出過程を詳しく書くこと。また、 $B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ の関係が成り立つことを用いてもよい。

$$I(n) = 2 \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (4)$$

ここで、 $n!!$ は二重階乗を表し、 n が偶数の時は、 $n!! = n \times (n-2) \times \cdots \times 4 \times 2$ となり、 n が奇数の時は、 $n!! = n \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 1$ と表せるものとする。

[4]

- 4-1. 天体1 (質量 M) から距離 r の位置にある天体2 (質量 m) の運動を考える。天体2 は天体1 から万有引力 (万有引力定数 G) のみを受け、天体の大きさは無視できるとする。また、 M は m に比べて十分大きい ($M \gg m$) とし、天体2 は空間に固定された天体1 の周りを運動するとみなせるとする。以下の問に答えよ。必要に応じて、天体1 の位置を原点としたときの極座標表示 (r, θ) による天体2 についての動径方向の運動方程式と、軌道角運動量 l についての式

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{l^2}{mr^3} = F_r \quad (1)$$

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = l \quad (2)$$

を用いてよい。ここで、 l は定数であり、 t は時刻、 F_r は力の動径方向成分を表す。

- 4-1-1. 天体2 が天体1 を中心とする半径 r_0 の円軌道を描くとき、この円運動の周期 P_0 を求めよ。結果は G , M , r_0 を用いて書き表わせ。

- 4-1-2. 問 4-1-1. の円軌道から微小なずれ $\Delta r(t)$ があるとする。 $r = r_0(1 + \Delta r/r_0)$ として、 $\Delta r/r_0$ について1次の項のみを残した微分方程式を書き、 Δr の振動の周期 P を求めよ。結果は G , M , r_0 を用いて書き表わせ。

- 4-1-3. 天体1 を中心として半径 $R(> r)$ 以内に様な密度 ρ でガスが分布しているとする。このとき、天体2 は天体1 からの万有引力に加え、ガスからの万有引力 f を受ける。 f は

$$f = -mCr \quad (3)$$

と表わせ、 C は G と ρ で表される定数、 r は天体1 から天体2 に向かうベクトルである。天体2 がガスから受ける力はこの万有引力のみとし、ガス抵抗などは受けないとする。以下の問に答えよ。

- 4-1-3-1. C を G と ρ を用いて書き表わせ。

- 4-1-3-2. 天体2 が天体1 を中心とする半径 $r_g(< R)$ の円軌道を描くとき、この円運動の周期 T_0 を求めよ。結果は G , M , r_g , C を用いて書き表わせ。

- 4-1-3-3. 問 4-1-3-2. の円軌道から微小なずれ $\Delta r(t)$ があるとする。 $r = r_g(1 + \Delta r/r_g)$ として、 $\Delta r/r_g$ について1次の項のみを残した微分方程式を書き、 Δr の振動の周期 T を求めよ。結果は G , M , r_g , C を用いて書き表わせ。

- 4-1-3-4. 式 (3) の万有引力は、天体1 と天体2 の間に働く万有引力に比べて十分に小さいとする。このとき、問 4-1-3-3. のずれがある軌道では、問 4-1-3-2. と問 4-1-3-3. で求めた周期 T_0 , T の違いから、天体2 が天体1 に最も近づく点 (近点) が軌道面上を移動する。軌道運動の向きに対して、前進、後退のどちら向きに移動するか。理由とともに述べよ。

4-2. ローレンツ変換とは、2つの慣性系における時間・空間座標を結びつける変換のうち、「真空における光の速さ c はどの慣性系でも同一である」という光速不変の原理を満たすものである。以下では具体的に、2つの慣性系 K, K' を考え、それぞれにおける時間座標を t, t' 、デカルト空間座標を $(x, y, z), (x', y', z')$ とする。 K' 系は K 系から見て、 x 方向に一定速度 $v (v \neq 0)$ で運動しているとする。また、空間中において、 x', y', z' 軸はそれぞれ x, y, z 軸の方向を向くとする。 K 系の時間・空間座標の原点 $(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$ は、 K' 系の原点 $(t', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$ に一致するとする。このとき、ローレンツ変換は以下のような線形変換として書くことができる。

$$t' = Pt + \frac{Qx}{c} \quad (4)$$

$$x' = Rct + Sx \quad (5)$$

$$y' = y, \quad z' = z \quad (6)$$

ここで P, Q, R, S は無次元で、 v の関数である。 P および S は正の値をとる。以下では $y' = y = z' = z = 0$ とおく。

4-2-1. K 系から見た K' 系の運動を考え、比 R/S を求めよ。結果は v, c のみを用いて書き表せ。

4-2-2. K 系は K' 系から見て、 x' 方向に一定速度 $-v$ で運動する。このことから、比 P/R を求めよ。結果は v, c のみを用いて書き表せ。

4-2-3. 光速不変の原理から、和 $P+Q$ と $R+S$ の間に成り立つ関係を求めよ。ここでは、光とは速さ c で進む粒子のことであると考えてよい。

4-2-4. 問 4-2-1. から問 4-2-3. までの結果を用いて、 Q, R, S を P, c, v のみを用いて書き表せ。

4-2-5. 位置 $x = 0$ に静止する装置 A が、一定の時間間隔 T_A で、光の速さで進む粒子を $+x$ 方向に放射している。この粒子を、 x 方向に一定速度 v で移動する別の装置 B が受け取る。この問題では $v > 0$ とし、かつ装置 B は $x > 0$ の位置にいるとする。装置 B は内蔵された時計を用いて、粒子を受け取る時刻を記録する。この記録によると、装置 B は時間間隔 T_B で粒子を受け取っている。 T_B を T_A, v, c, P, Q, R, S のうち必要なものを用いて書き表せ。前問までの結果を用いなくてよい。

筆答専門試験科目（午後）
地球惑星科学系

2023 大修

時間 13:30～16:00

注 意 事 項

1. 以下の4問（5～8）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各解答用紙には必ず問題番号（5～8）および受験番号を記入すること。

[5] 以下の文章を読み、問いに答えよ。

2022 年現在、周期表には 118 種類の元素が存在し、それぞれ正式な名称と元素記号が与えられている。この中で天然に存在する元素は約 90 種類あり、残りは人工的に合成することで、その存在が確認されている。では、天然に存在する元素はどのように生まれたのだろうか。元素は、ある原子核から別の原子核が作られることにより、誕生する。これを元素合成（あるいは原子核合成）と呼ぶ。現在の理論では、元素合成はビッグバンおよびその後の恒星進化に伴って生じたと考えられている。ビッグバンの 3 分後、陽子(p)と中性子(n)が融合して重水素原子核(^2H)が作られる。(a)その後、 ^3H 及び ^3He が合成され、更に ^4He も合成される。また、少量の ^7Li や ^7Be も合成されるが、(b)ビッグバン元素合成では質量数 8 以上の原子核は作られない。

質量数 8 以上の原子核はビッグバン後に誕生した恒星の内部で合成される。主系列星にある恒星内部では水素燃焼が生じており、 ^1H が融合して ^4He が作られる。恒星中心で ^1H が使い果たされると恒星は赤色巨星となり、(c)中心ではヘリウム燃焼が開始する。これ以降の恒星進化および元素合成は、恒星の質量により異なるルートを辿る。恒星の質量が太陽質量の約 8 倍以下の場合、元素合成はヘリウム燃焼で終了する。恒星中心のヘリウムが燃え尽きると核融合は終了し、赤色巨星は最終的に白色矮星となる。一方、恒星質量が太陽質量の約 8 倍以上の場合、ヘリウム燃焼で作られた原子核が融合し、更に重い原子核が作られる。作られる原子核は恒星質量に依存するが、例えば太陽質量の 20 倍の恒星では、最終的に ^{56}Fe まで合成される。

一方、 ^{56}Fe より重い原子核は連続的な中性子捕獲により合成される。(d)中性子捕獲による元素合成では、s プロセスと r プロセスと呼ばれる過程が存在する。種となる原子核に中性子が 1 個捕獲されると、質量数が 1 だけ大きい原子核ができる。更に中性子が捕獲されると質量数がより大きな原子核が合成されるが、(e)その原子核が不安定である場合、次の中性子捕獲が生じる前に原子核が放射壊変する。このように、s プロセスや r プロセスでは中性子捕獲と放射壊変を繰り返すことにより、重い原子核が合成されていく。

- 5-1. 下線部 A について、重水素から ^3H および ^3He を作る核融合反応をかけ。
- 5-2. 下線部 B について、ビッグバン元素合成で質量数 8 以上の原子核が作られない理由を 3 行以内で述べよ。
- 5-3. 下線部 C について、ヘリウム燃焼ではどのような核融合によりどのような原子核が作られるか、述べよ。
- 5-4. 下線部 D について、s プロセスと r プロセスにはどのような違いがあるか。以下の語句を全て使い、10 行以内で説明せよ。

【中性子捕獲速度・AGB 星・重力崩壊型超新星爆発・中小質量星・ ^{209}Bi ・ ^{238}U 】

5-5. 下線部 E にある放射壊変はどのような種類の放射壊変か、答えよ。

5-6. 太陽系形成直後には恒星で合成された様々な原子核が存在したが、その中には放射壊変を起こす不安定核種も多く存在した。不安定核種のうち、半減期が太陽系の年齢よりはるかに短いものは消滅核種と呼ばれ、現在、自然界に存在しない。半減期 2.10×10^5 年の ^{99}Tc (テクネチウム-99) も消滅核種の一つである。また、 ^{99}Tc より半減期の長いテクネチウムとして、 ^{97}Tc (半減期 2.10×10^6 年) 及び ^{98}Tc (半減期 4.20×10^6 年) が存在する^[注 1]。太陽系形成直後のテクネチウム同位体比を調べたところ、 $^{97}\text{Tc}/^{99}\text{Tc}=0.500$ 、 $^{98}\text{Tc}/^{99}\text{Tc}=0.250$ であった。このとき、以下の問いに答えよ。必要であれば $\ln 2 = 0.69$ 、 $\ln 5 = 1.61$ を使ってよい。

5-6-1. 太陽系形成直後のテクネチウムの原子量を有効数字 3 桁で求めよ。ただし、 ^{97}Tc 、 ^{98}Tc 、 ^{99}Tc の質量はそれぞれ 97.0、98.0、99.0 g mol⁻¹ とする。また、 ^{97}Tc 、 ^{98}Tc 、 ^{99}Tc 以外のテクネチウム同位体は存在しないとする。計算の過程を示すこと。

5-6-2. ^{97}Tc 、 ^{98}Tc 、 ^{99}Tc が消滅したのは太陽系形成から何年後か、それぞれ有効数字 3 桁で求めよ。ただし、太陽系形成時に存在した各核種の量が百万分の一以下になったときを消滅とみなす。計算の過程を示すこと。

5-6-3. ^{99}Tc が消滅した瞬間のテクネチウムの原子量を有効数字 3 桁で求めよ。計算の過程を示すこと。

5-6-4. 太陽系形成から一定時間が経過すると、 ^{99}Tc の放射能が ^{98}Tc の放射能を下回る。その時間は ^{99}Tc の半減期の何倍か、有効数字 3 桁で求めよ。計算の過程を示すこと。

注 1: ^{97}Tc 、 ^{98}Tc 、 ^{99}Tc の半減期は精密には求まっていない。ここでは便宜上、上記の値を用いた。

[6] 以下の設問に解答せよ。

- 6-1. ギブスの相律を導出せよ。独立成分の数、平衡に共存する相の数、相の数を変えることなく自由に変化させることのできる示強変数の数(自由度)をそれぞれ C, P, F と表記すること。ある相 i 中の j 成分のモル分率を x_j 、平衡状態において各相を構成する j 成分の化学ポテンシャルを μ_j^i と表記すること。
- 6-2. 図 1 は H_2O の相平衡図である。この相図上で自由度 F が 0 の状態を全て答えよ。
- 6-3. 融点は固液 2 相の相境界である。融点の圧力変化は Clausius–Clapeyron の式を使って表される。図 1 のように、 H_2O には融解曲線の傾きが正の場合と負の場合がある。矢印 A (液相–氷 Ih 相) および矢印 B (液相–氷 VI 相) の相転移において、融解曲線の傾きが異なる理由を Clausius–Clapeyron の式を使って相転移前後の密度差と結晶構造の違いに着目しながら 5 行以内で説明せよ。
- 6-4. 氷 VII 相と VI 相、液相の三重点近傍における VII 相の融解熱とモル体積差がそれぞれ $7,000 \text{ J/mol}$, $0.9 \text{ cm}^3/\text{mol}$ であったとする。このときの氷 VII 相の融解曲線の傾きを Clausius–Clapeyron の式を用いて計算し、 MPa/K を単位として整数で答えよ。図 1 中の該当する三重点から温度を読み取ること。
- 6-5. ボツワナで採取されたダイヤモンド中の包有物として H_2O を主成分とする $40\sim 3000 \text{ }\mu\text{m}^3$ の体積の固相が発見され、2017 年に氷 VII 相 (Ice-VII) と認定された。このとき、以下の問いに答えよ。
- 6-5-1. H_2O 固相の結晶構造は X 線回折測定のみでは精密に決定することが難しい。その理由を 3 行以内で説明せよ。
- 6-5-2. ダイヤモンド中の微小な包有物が氷 VII 相と認定されるためには問 6-5-1 の X 線回折測定に加えて、どのような実験的手法が必要とされるか。代表的な手法名とその測定原理を 3 行以内で答えよ。
- 6-5-3. ダイヤモンド中の氷 VII 相の格子体積(V)を測定したところ、 $26.3 \text{ }\text{\AA}^3$ であった。この氷がダイヤモンドから受けている圧力(P)を下記のマーナハンの状態方程式を用いて計算し、ギガパスカル(GPa)を単位として整数で答えよ。
- $$\text{マーナハンの状態方程式: } P(V) = \frac{K}{K'} \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^{K'} - 1 \right]$$
- ただし、常圧での氷の体積(V_0)を $41 \text{ }\text{\AA}^3$ 、常圧での体積弾性率(K)を 20 GPa 、 K の圧力微分(K')を 4 とする。
- 6-5-4. 地球のマントル遷移層 (深さ 410 km) から下部マントル中部 (深さ 1500 km) にかけての地温勾配の推定方法を鉱物の相転移に言及しながら 5 行以内で説明せよ。
- 6-5-5. この氷 VII 相を含むダイヤモンドは地球マントルのどこで生成され、 H_2O は何相であったと考えられるか。理由を含めて 7 行以内で答えよ。なお、本問では図 1 の氷 VII 相の融解曲線はマントル最深部 (深さ 2890 km) まで直線的に外挿できるものとする。

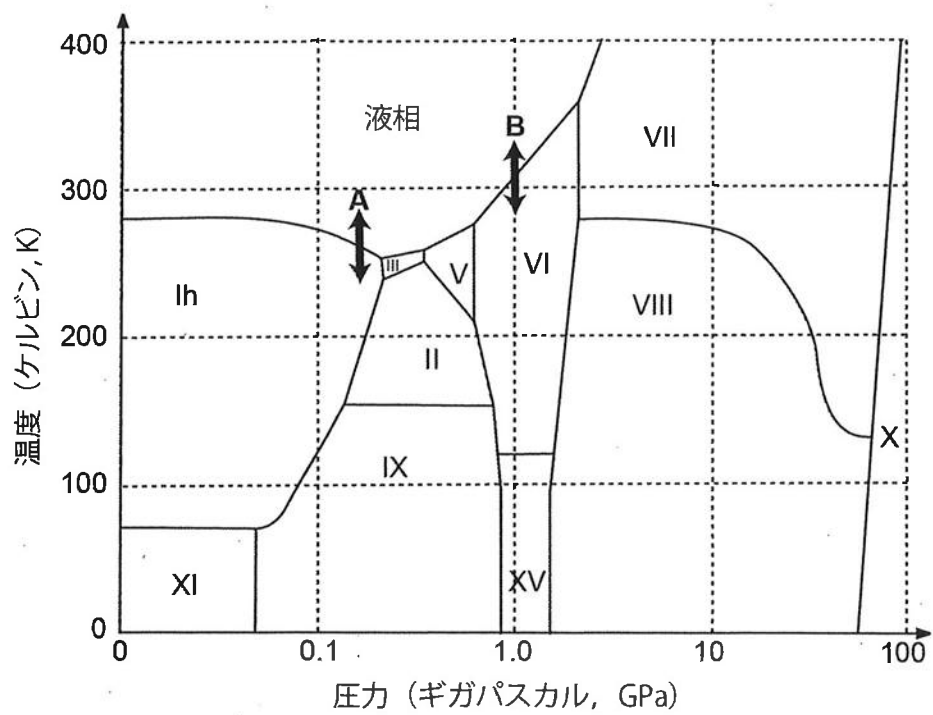


図 1. H₂O の相平衡図 (Hansen 2021 を簡略化). 図中のローマ数字は H₂O 固相の名称を表す. 点線はグリッド線.

[7]

7-1. 図1のような底面の半径が a で高さが L の円筒容器を考える。この容器に、質量 m の気体分子が N 個入っている。また、気体分子は容器の内壁と完全弾性衝突しており、内壁との摩擦は無いものとする。ただし、重力の影響は無視でき、気体分子同士の衝突はないものとする。容器の底面（および上面）に平行な面を水平面と定義し、その水平面内に x 軸と y 軸をとり、円筒の中心軸に平行上向きに z 軸をとる。以下の問いに答えよ。

7-1-1. 速度 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ を持つある1個の気体分子に注目したとき、この気体分子が容器底面に1回衝突した際に底面に及ぼす力積の大きさ I_z を求めよ。また、この気体分子が底面と衝突した直後から、再度底面に衝突するまでの時間 t_z を求めよ。

7-1-2. 速度の z 成分を二乗したものを N 個の分子で平均した値 $\langle v_z^2 \rangle$ を用いて、底面が受ける圧力 p_z を求めよ。

7-1-3. 次に容器側面と気体分子の衝突を考える。気体分子の z 軸の速度成分 v_z は容器側面に影響を及ぼさないので、図2のような $x-y$ 平面の気体分子の運動を考えればよい。図2のように、気体分子が容器側面と衝突した際の水平面における壁に対する入射角を θ とする。このとき、この気体分子が容器側面に1回衝突した際に容器側面の壁に及ぼす力積の大きさ I_h を求めよ。また、この気体分子が側面と衝突した直後から、再度側面に衝突するまでの時間 t_h を求めよ。

7-1-4. 速度の水平成分を二乗したものを N 個の分子で平均した値 $\langle v_h^2 \rangle$ を用いて、側面が受ける圧力 p_h を求めよ。

7-1-5. 容器内に多数の気体分子が飛び回っており、速度 $\boldsymbol{v}$ が等方的である場合、容器底面が受ける圧力 p_z と容器側面が受ける圧力 p_h が等しくなることを示せ。

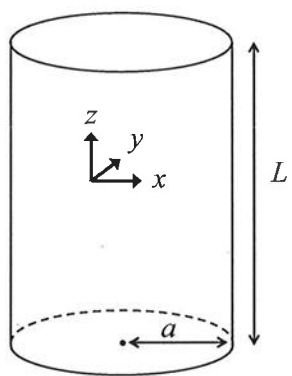


图1

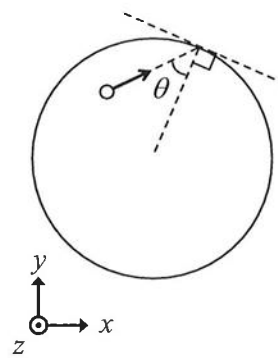


图2

7-2. 球対称な中心力場中の粒子の量子力学的運動を考える。極座標系 (r, θ, φ) を用い、粒子の位置を $\mathbf{r}$ 、ポテンシャルを $V(r)$ 、波動関数を $\Psi(\mathbf{r})$ 、 $\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数)、 μ を粒子の質量とすると、時間に依存しない Schrödinger 方程式は次式で表される。

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Psi(\mathbf{r}) + V(r) \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

7-2-1. 波動関数 $\Psi(r, \theta, \varphi)$ が $\Psi = R(r)Y(\theta, \varphi)$ と表されると仮定し、さらに定数 l を適切に導入することにより、式 (1) から $R(r)$ と $Y(\theta, \varphi)$ に関する次の2つの微分方程式を導け。

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] R = ER \quad (2)$$

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] = l(l+1)\hbar^2 Y \quad (3)$$

7-2-2. 関数 $Y(\theta, \varphi)$ をさらに $Y = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ と変数分離すると、 $\Theta(\theta)$ と $\Phi(\varphi)$ のそれぞれに関する次の2つの微分方程式が得られる。

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (5)$$

波動関数は1価であるから、 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ という条件を満たす。このことから、 m が整数であることを示せ。また、 m が与えられたときの式 (5) の解を $\Phi_m(\varphi)$ と書くとき、 $\Phi_m(\varphi)$ の規格化された解を求めよ。ここで $\Phi_m^*(\varphi)$ は $\Phi_m(\varphi)$ の複素共役を表し、次の規格化条件を満たす。ただし、 m_1 と m_2 は整数である。

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{m_1}^*(\varphi) \Phi_{m_2}(\varphi) d\varphi = \begin{cases} 1 & \cdots m_1 = m_2 \text{ のとき} \\ 0 & \cdots m_1 \neq m_2 \text{ のとき} \end{cases}$$

7-2-3. 粒子の状態が、量子数 m が $m = m_1$ に対応する状態であるとする。軌道角運動量の z 成分 $\hat{L}_z$ は、極座標を用いると次のように表せる。

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

規格化された波動関数 $\Psi_{m_1}(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi_{m_1}(\varphi)$ が軌道角運動量の z 成分 $\hat{L}_z$ に対する固有関数であることを示せ。またこのとき、軌道角運動量の z 成分の期待値 $\langle L_z \rangle$ を求めよ。

7-2-4. 式(4)の中の定数 l は 0 以上の整数で、軌道角運動量に関する量子数である。
軌道角運動量演算子の 2 乗 $\hat{L}^2$ は、極座標を用いると次のように書ける。

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (6)$$

この粒子の状態が、量子数 l が $l = l_1$ に対応する状態のとき、軌道角運動量の 2 乗の期待値 $\langle L^2 \rangle$ を求めよ。

[8]

- 8-1. 複素数を要素とする 2×2 行列 A と 2 次元列ベクトル x がある。ただし、 i は虚数単位である。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 8-1-1. 次の f を x_1, x_2 を用いて表せ。ただし、 ${}^t\bar{x}$ は x の複素共役をとり転置したものの、すなわち ${}^t\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ を表す。

$$f = {}^t\bar{x}Ax$$

- 8-1-2. 次の行列 S とベクトル y を導入して、 x を y で表す。

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1+i & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x = Sy$$

前問の f を、 y_1, y_2 を用いて表せ。

- 8-2. 実数を要素とする $n \times n$ 対称行列 A と n 次元列ベクトル x がある。ここで、 n は 2 以上の整数とする。行列 A の固有値を λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) と書く。このとき、直交行列 P が存在して次が成り立つ。

$$AP = P\Lambda, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\Lambda \text{ の非対角成分は全て } 0)$$

ベクトル x の関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = {}^tAx$$

- 8-2-1. ベクトル y を $x = Py$ として導入することにより、次のように書けることを示せ。

$$f(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

ただし、 y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) はベクトル y の第 i 成分である。

- 8-2-2. 固有値の値が $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ となっているとする。恒等式 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = \lambda_1(y_1^2 + y_2^2) + (\lambda_2 - \lambda_1)y_2^2$ を考慮しつつ、条件 ${}^txx = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ の下では次の関係が成り立つことを示せ。

$$f(x) \leq \lambda_n$$

ただし、 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) はベクトル x の第 i 成分である。

8-3. xy 平面上の実関数 $\phi(x, y)$ が, 図1のような領域 $0 < x < a$, $0 < y < b$ (a, b は正の定数) 上でラプラス方程式

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0 \quad (1)$$

を満たすとする。ここで, ∇^2 はラプラス演算子である。このような $\phi(x, y)$ のうち, 以下の境界条件

$$\phi(0, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq b) \quad (2)$$

$$\phi(a, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq b) \quad (3)$$

$$\phi(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (4)$$

$$\phi(x, b) = V \quad (0 < x < a) \quad (5)$$

を満たすものを求めたい。ここで, V はゼロでない実定数である。

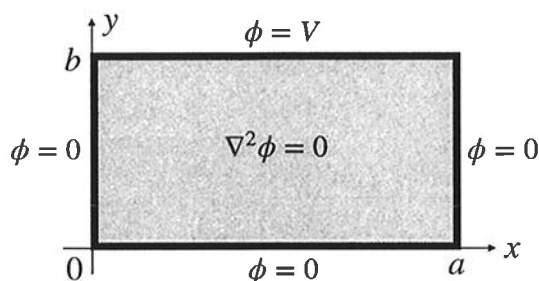


図1

8-3-1. まずは, 以下のような形の $\phi(x, y)$ を考えてみる。

$$\phi(x, y) = [A_n \cos(ncx) + B_n \sin(ncx)]g_n(y) \quad (6)$$

ここで, n は任意の自然数, A_n, B_n は実定数 (いずれかはゼロでない), c は正の定数, $g_n(y)$ は y の実関数である。式 (6) が式 (1) を満たすと仮定し, $g_n(y)$ が満たすべき2階の微分方程式を求めよ。さらに, C_n, D_n を任意の実定数とし, その微分方程式の一般解を C_n, D_n を含む形で書き表せ。

8-3-2. 式 (6) が式 (1) に加えて式 (2)–(4) を満たすと仮定する。式 (2)–(4) から, 以下の3つを求めよ。

(a) A_n

(b) c (ただし, c は $0 < ca < 2\pi$ の範囲内にあり, n に依らないとする)

(c) C_n と D_n のいずれか。または, C_n と D_n の間に成り立つべき条件

8-3-3. 式 (6) の $\phi(x, y)$ は式 (1)–(4) を満たすことができるが, 式 (5) を満たすことはできない。そこで, 改めて以下のような形の $\phi(x, y)$ を考える。

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1,2,\dots} [A_n \cos(ncx) + B_n \sin(ncx)]g_n(y) \quad (7)$$

ここで、 $g_n(y)$ は問 8-3-1. で求めたものであり、 A_n および c は問 8-3-2. の (a) および (b) で求めたものである。式 (5) を用いて B_n を求めよ。この問の結果は $n, g_n(b), V$ のみを用いて書き表すこと ($g_n(b)$ に問 8-3-1. の結果を代入しなくよい)。必要であれば、結果を n の値に応じて場合分けして書き表してよい。以下の関係式も用いてよい。

$$\int_0^a \cos(jcx) \cos(kcx) dx = \int_0^a \sin(jcx) \sin(kcx) dx = \begin{cases} \frac{a}{2}, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

ここで、 j, k は任意の自然数である。