

[1]

n を 2 以上の整数とする。 A を実数を成分とする $n \times n$ 行列, \mathbf{x}, \mathbf{b} を n 次元実ベクトルとし, それぞれ次のように表されるとする。ただし, a_{ij}, x_i, b_i (i, j は整数) は実数である。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

行列 A とベクトル \mathbf{x} の積 $A\mathbf{x}$ は n 次元ベクトルとなり, その第 i 成分を成分表示すると, 次のようになる。

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

また, 2つのベクトル \mathbf{x}, \mathbf{b} の内積を $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle$ と表し, 次のように定義する。

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i b_i$$

任意のベクトル \mathbf{x} ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) に対して

$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle > 0$$

となるとき, A は正定値行列であるという。

以下の間に答えよ。

1-1. A が正定値行列ならば, その対角成分はすべて正であることを示せ。

1-2. 行列 A が対称行列であるとする。またここでは, 行列 A のすべての固有値は互いに異なると仮定する。このとき, 行列 A が正定値行列であるための必要十分条件は, 行列 A のすべての固有値が正であることを示したい。

以下では, 「対称行列の固有値は実数であること」, および「対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交している」ことを用いてもよい。

1-2-1. 対称行列 A のすべての固有値が正であることは, 対称行列 A が正定値行列であるための必要条件であることを示せ。

1-2-2. 対称行列 A のすべての固有値が正であることは, 対称行列 A が正定値行列であるための十分条件であることを示せ。

1-3. 行列 A は対称でかつ正定値行列であるとし, ベクトル \mathbf{x} の関数 $f(\mathbf{x})$ を

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle$$

と定義する。また, n 次元実ベクトル $\tilde{\mathbf{x}}$ が $A\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ を満たすとする。このとき, 関数 $f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$ のときに最小値をとることを示せ。

1-4. 行列 A は対称でかつ正定値行列であるとする。行列 A の対角成分と同じ対角成分をもつ対角行列を D , 行列 A の上三角行列からさらに対角成分を引いた行列を U とする。行列 D と U はそれぞれ次のように書ける。

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

また、行列 A は対称行列だから、

$$A = D + U + U^T$$

と書ける。ただし U^T は、行列 U の転置行列を表す。

行列 $(D + U)$ には逆行列が存在するとし、それを $(D + U)^{-1}$ と記す。行列 L を次のように定義する。

$$L = -(D + U)^{-1}U^T$$

行列 L の固有値のひとつを λ , その固有ベクトルを v とすると、次の関係が成り立つ。

$$Lv = \lambda v$$

1-4-1. 次の式が成り立つことを示せ。

$$U^T v = -\lambda(D + U)v$$

1-4-2. 次の式が成り立つことを示せ。

$$Av = (1 - \lambda)(D + U)v$$

1-4-3. 固有値 λ は、 $\lambda \neq 1$ であることを示せ。

1-4-4. 次の式が成り立つことを示せ。

$$\langle U^T v, v \rangle = -\lambda \langle v, (A - U)v \rangle$$

1-4-5. 次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \langle v, Av \rangle = \langle v, Dv \rangle$$

1-4-6. 固有値 λ は、 $-1 < \lambda < 1$ であることを示せ。

[2]

磁気单極子が存在すると仮定する。原点に置いた時間変化のない磁気单極子の磁荷を q_m とすると、これによってできる磁場(磁束密度) \mathbf{B} は、位置ベクトルを \mathbf{r} 、その大きさを r として、次のように表せる。

$$\mathbf{B} = \frac{q_m}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

2-1. 質量 m 、電荷 q の荷電粒子が、磁気单極子によりできる磁場の中を運動するとする。

荷電粒子の加速度 $d\mathbf{V}/dt$ を、速度ベクトルを \mathbf{V} として示せ。

2-2. 問 2-1 の時、速度の大きさは運動の定数(時間変化しない量)であることを示せ。

2-3. 問 2-1 の時、次のベクトル量も運動の定数であることを示せ。

$$\mathbf{Q} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{V}) - \frac{qq_m}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

2-4. 問 2-3 の \mathbf{Q} の方向を Z 軸とした座標系を導入する。さらに、ここでの極座標系 (r, θ, ψ) を考え、各方向の単位ベクトルを e_r, e_θ, e_ψ とすると、ベクトル \mathbf{Q} は (r, θ, ψ) の各成分に分解できる。

2-4-1. $\mathbf{Q} \cdot e_\psi$ を計算することにより、 θ が運動の定数、すなわち θ 方向の運動はないことを示せ。

2-4-2. $\mathbf{Q} \cdot e_r$ を計算することにより、 \mathbf{Q} の大きさを求めよ。(大きさであるから、常に正の量であることに留意せよ。)

2-4-3. $\mathbf{Q} \cdot e_\theta$ を計算することにより、 $d\psi/dt$ を求めよ。

2-4-4. \mathbf{V} を極座標表示することにより、 r 方向の速度を表す式を求め、無限遠方で有限の速度の大きさ $|\mathbf{V}| = V$ を持つ粒子は、ある距離以上には原点に接近できないことを示せ。

2-4-5. 以上のことを考慮して、この粒子の運動の特徴を、図を使うなどして説明せよ。ただし、具体的に軌道の式を求める必要はない。

〔3〕設問に解答せよ。

3-1. 下から言葉を選び文章を完成せよ。解答用紙に記号に当てはまる言葉を記入すること。

結晶を作る骨格の最小単位は **1** であらわされる場合が多い。この最小単位を **2** と呼び、格子を作る各点を格子点という。結晶の対称性を理解するうえでは **2** を大きくとって複数の格子点を含むようにする方が都合がよい。そのようにして **2** を拡張・整理すると **3** 種類の **4** に分類される。格子点にのみ原子が配列する **5**、格子点に加えて内部に原子が位置する **6**、格子点に加えて各面に原子が位置する **7** などに分類される。また結晶は対称性が高いものから順に、**8**、正方晶系、六方晶系、三方晶系、**9**、**10**、三斜晶系、の 7 つの結晶系に分類される。

单斜晶系 菱面晶系 单純格子 斜方晶系 空間群 ブラヴェ格子 单位格子 立方体
面心格子 体心格子 14, 36, 128, 底心格子 立方晶系 平行六面体 球体 正四面体

3-2. 下図は NaCl の結晶構造模型である。NaCl について以下の設間に答えよ。

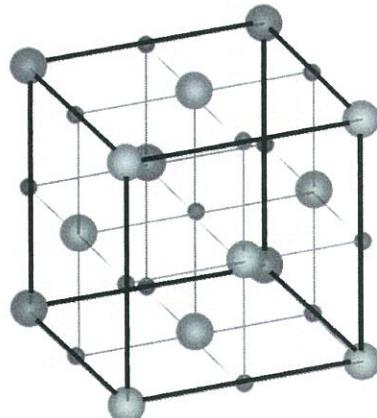
3-2-1. NaCl 結晶を構成する Na イオンおよび Cl イオンそれぞれの電子構造を電子エネルギー準位と電子配置が判るように図示せよ。

3-2-2. 大部分のシリケイト鉱物は水溶性が非常に低い。
これに対して NaCl 結晶は高い水溶性を示す。
この違いが生じる理由を化学結合の性質
に基づき 3 行以内で説明せよ。

3-2-3. 1 気圧下で NaCl 結晶のデバイ温度は 321K、
融点は 1074K である。NaCl 結晶の定積比熱の
温度変化を絶対零度から 1000K の範囲で予測し
図示せよ。比熱の単位は $J/(mol \cdot deg)$ を用いよ。
ただし、 $R = 8.3 J/(mol \cdot deg)$ とせよ。

3-2-4. 右の図に示す結晶単位格子中に含まれる Na
および Cl の原子数をそれぞれ求めよ。

3-2-5. 1 気圧 25°C での NaCl 結晶の密度は $2.2 g/cm^3$ である。このことから NaCl 結晶中での
Na と Cl の最近接原子間距離を有効数字 2 枠で計算せよ。考え方および計算の道筋も
書くこと。ただし、Na および Cl の原子量をそれぞれ 23 および 35、アボガドロ数を
 6.0×10^{23} とせよ。



3・2・6. NaCl は高圧下で異なる結晶構造に相転移することが実験的に確かめられている。高圧相転移後の NaCl の結晶構造を予測し図示せよ。また、そのように考える理由を 5 行以内で説明せよ。

3・3. 以下の分析機器・手法は物質のどのような性質を解明することに役立つか。それぞれの装置の原理と適用例を 1 項目につき 3 行以内で説明せよ。

3・3・1. 偏光顕微鏡

3・3・2. イオンクロマトグラフィー

3・3・3. ICP-MS

3・3・4. 粉末X線回折法

[4]

- 4-1. 図 1 は、ある地域の地質図である。地質体 A と地質体 B の境界面の走向の方位を記せ。
- 4-2. その境界面は褶曲している。褶曲軸の走向の方位を記せ。
- 4-3. 花崗岩の岩体 C からジルコンを分離し、その U-Pb 同位体年代を測定した。そのコンコーディア年代は 70 ± 1 Ma を示した。コンコーディア年代とは何か、説明しなさい。
- 4-4. 地質体 D は広域変成帯である。東西断面図が図 2 に示されている。その内部構造は変成分帶によって 5 つのゾーンに分帶されている（図 3）。各ゾーンでの最高温度・圧力条件における出現鉱物の消長が図 3 に示されている。ゾーン a から e への変成作用の温度・圧力条件の変化を図 4 の中に記せ。ただし、a/b 境界と d/e 境界の変成温度はそれぞれ 300°C 、 700°C とする。
- 4-5. D の変成岩の中にジルコンがあり、ジルコン粒子の内部に包有鉱物の種類の違いが見られた。ジルコンの中心には石英 + 斜長石 + 石墨、マントル部にはヒスイ輝石 + コーズ石 + ダイヤモンド、縁には石英 + 曹長石 + 紅柱石が見られた。ジルコンの U-Pb コンコーディア年代は中心で 150 Ma、マントルは 120 Ma、縁は 80 Ma であった。このジルコンを含んだ岩石の採集地点は d/e の境界地点である。この変成岩の沈み込み速度と上昇速度を計算しなさい。
- 4-6. ジルコン結晶のサイズは 2 mm 径である。この結晶の内部に様々な温度・圧力下で安定な鉱物が残されている理由を考察しなさい。
- 4-7. 地質体 E は中央海嶺玄武岩、層状チャート、珪質泥岩、タービダイト砂岩層を伴う付加帯である。中央海嶺直上のチャート層から 250 Ma を示す微化石が得られた。珪質泥岩の微化石は 140 Ma を示し、タービダイト砂岩層から 145 Ma の微化石が得られたとする。沈み込んだ海洋プレートが当時の海溝軸に到着した時代と、その当時のプレートの年齢を記せ。

4-8. 広域変成帯 D の上位に低圧高温型の広域変成帯 F が累重している（図 2）。その変成相系列は紅柱石—珪線石型である。変成作用の年代は U-Pb ジルコン法で 120Ma であった。下位の低温高圧型変成帯の中に安山岩岩脈があり、それは二つの変成帯の境界断層面に沿って、マイロナイト化している。その火成鉱物の K-Ar 年代は 20Ma、変成粘土鉱物の K-Ar 年代は 15Ma であった。二つの広域変成帯 D と F が上下に重なり合った時代を推定し、その根拠を書きなさい。

4-9. この岩脈が貫入する前後の地質体 D、E、F の関係を推定しなさい。

4-10. 二つの変成帯は、それぞれ火山フロント直下と海溝から沈み込んだスラブ直上のベニオフ面上で形成されたと仮定する。二つの変成帯が上下に累重する為には、水平方向にどれだけの地殻の欠損が必要か？沈み込む角度は 45 度、海溝と火山フロントまでの水平距離は 100km とする。ただし、両者が上下に累重した深度は 15 km とし、地質体 D はベニオフ面に沿って上昇したとする。

4-11. この地域の構造的最上位には蛇紋岩メランジュ（地質体 A）が累重する。メランジュの中には直径数mから数 100m 径の多種多様な変成岩が見られる。それらの変成岩の変成相系列は紅柱石—珪線石型であり花崗岩を伴う。また、ヒスイ輝石—藍閃石型の広域変成岩も出現する。これら 2 種類の広域変成岩の放射性同位体年代は、前者が 450Ma、後者が 360Ma である。これら 2 種類の広域変成岩が同じ地域で共存するには、前問 10 で考察した、地殻の欠損が必要である。これを構造侵食と呼ぶ。図 4 を参考にして 450Ma の時代の海溝—火山フロント断面図を書き、紅柱石—珪線石型広域変成帯の形成場を示せ。

4-12. 360Ma の時代には 2 種類の広域変成岩が共存したとする。その後で、蛇紋岩メランジュが形成された。これらの変成岩が地表露出するメカニズムを説明せよ。海溝と火山フロントの水平距離は常に 100km、沈み込むプレートの角度は常に 45 度とする。蛇紋岩の密度は 2.0—2.6、その源岩は島弧マントルの橄欖岩（密度 3.3）であると仮定する。

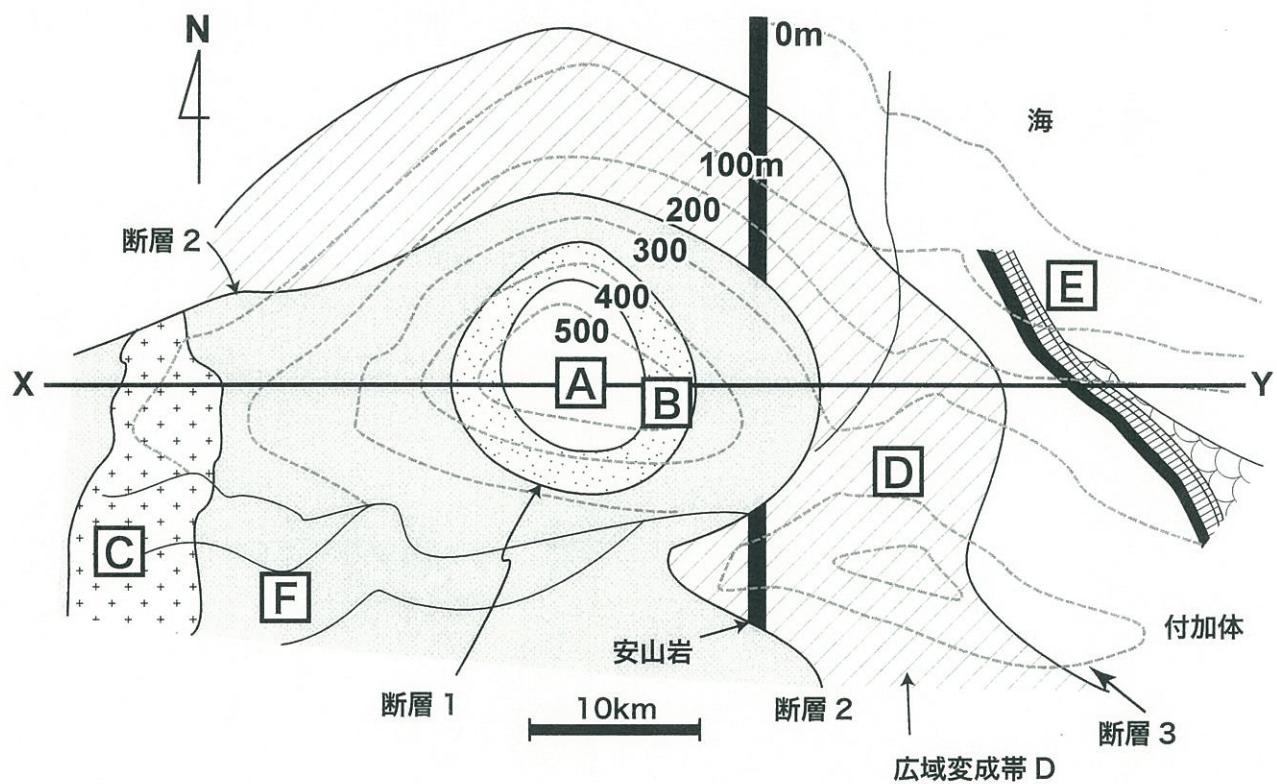


図 1

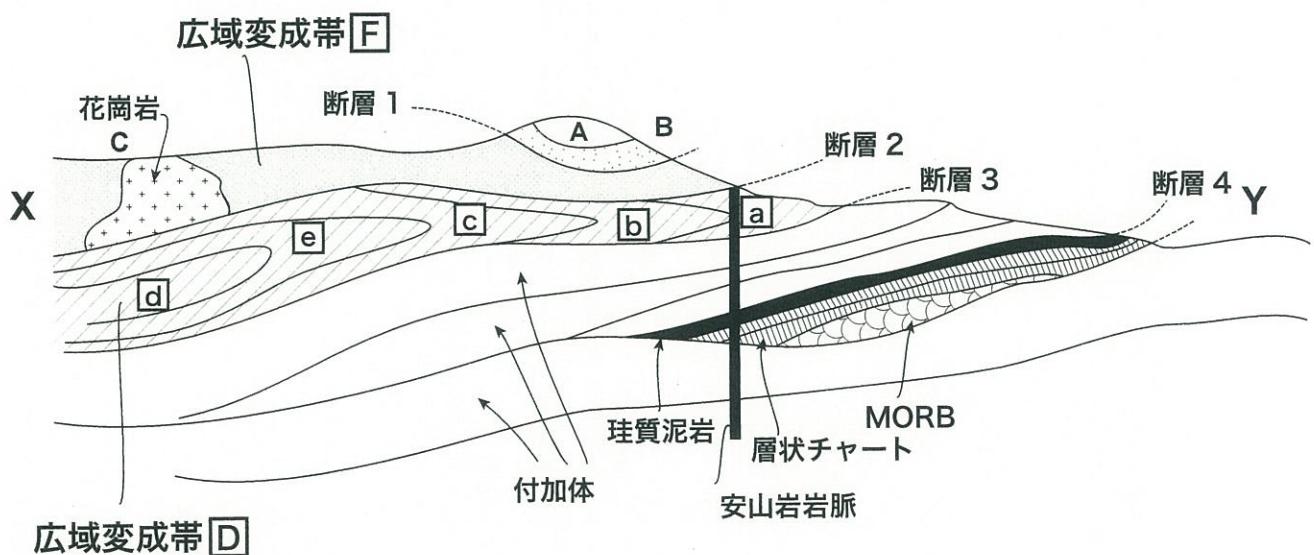


図 2

変成鉱物 帶	a	b	c	d	e
そう長石					
ヒスイ輝石					
石英					
coesite					
石ぼく					
ダイヤモンド					
方解石					
アラレ石					

図 3

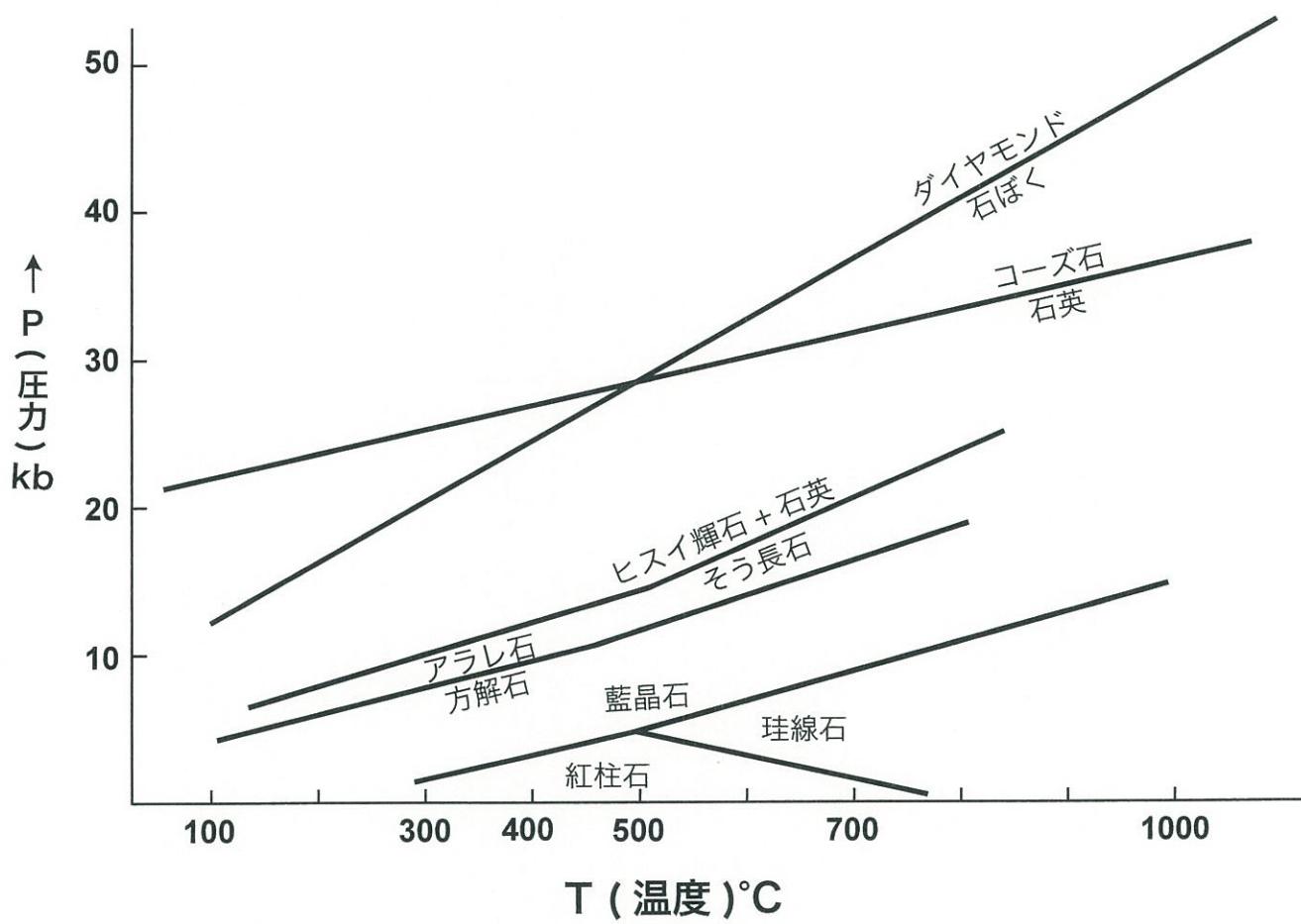


図 4

[5]

平面に直交座標 (x, y) をとり、平面上の滑らかな曲線を考える。曲線を表すには、実数関数 F を使って $F(x, y) = 0$ とする方法と、実変数のパラメータ t を使って $x = x(t), y = y(t)$ とする方法がある。後者を「パラメータ表示」と呼ぶことにする。曲線上の点 (x, y) における、曲線の線素ベクトルを $d\mathbf{p}(x, y)$ として、曲線の長さを $s = \int |d\mathbf{p}(x, y)|$ と定義する。ここで積分は曲線に沿った積分。

5-1. パラメータ表示で、 $t = 0$ から t までの曲線の長さ $s(t)$ を $dx(t)/dt, dy(t)/dt$ を使って、積分形で表せ。

5-2. ベクトル $e_1 \equiv d\mathbf{p}/ds$ の大きさが 1 であることを示せ。

5-3. e_1 は曲線の単位長さの接線ベクトルである。 e_1 を各点で反時計回りに 90 度回したベクトルを e_2 とする。このとき、 κ を実数として、 $de_1/ds = \kappa e_2, de_2/ds = -\kappa e_1$ とおけることを示せ。

5-4. 半径 a の円は $F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ と表すことができる (a は実定数)。以下の間に答えよ。

5-4-1. x 軸の正の方向からの角度を θ として、この円を θ を使って、パラメータ表示せよ。

5-4-2. e_1, e_2 を s, a の関数として表せ。

5-4-3. κ を求めよ。

5-5. 直線 $F(x, y) = y - (bx + c) = 0$ (b, c は実定数) の e_1, e_2 を求め、 κ を求めよ。

5-6. 双曲線 $F(x, y) = x^2 - y^2 - a^2 = 0$ の κ を求めよ。ただし、ここでは $x \geq 0, y \geq 0$ の領域だけを考えることにする。 κ は双曲線の各点で値が異なる。この双曲線のグラフを描き、 κ の値との関連を述べよ。

[6]

6-1. 質量 M の剛体について、固定された軸のまわりの回転を考える。剛体内部の各点（密度 ρ ）から回転軸までの垂線の長さを l とおくと、慣性モーメントは $\iiint \rho l^2 dV$ （ここで dV は剛体の微小体積素）と定義される。剛体の重心を通る回転軸に関する慣性モーメントを I_0 、この回転軸に平行かつ距離 d だけ離れた別の回転軸に関する慣性モーメントを I_1 とすると、 $I_1 = I_0 + Md^2$ が成り立つことを示せ。

6-2. 半径 a の剛体球とその回転運動について、以下の問い合わせよ。

6-2-1. 球の中心から半径 $a/2$ までは密度 ρ_c 、その外側 ($a/2 < r \leq a$) は密度 ρ_m とする。この球の中心を通る回転軸に対する慣性モーメントを、6-1 の定義に従って求めよ。導出過程も示すこと。

6-2-2. 6-2-1 の剛体球について、中心を通る回転軸に平行な別の回転軸（軸 A）を考える。球の中心を通る軸と軸 A の距離は d である。軸 A を水平（重力に対して直角）に固定し、中心を通る回転軸が軸 A の鉛直下方にくるようにして球を静止させる。次に、軸 A のまわりに球を微小振動させる。鉛直線からの回転角を ϕ とするとき、この振動の運動方程式を書き表せ。重力加速度の大きさを g とし、軸部での摩擦および球表面での摩擦は無視する。

6-2-3. 6-2-2 の微小振動の周期 T を求め、 T を最小にする d を求めよ。振動が微小であるため、 $\sin \phi \approx \phi$ として良い。

6-3. 半径 a の完全な球形をした惑星の万有引力について以下の問い合わせよ。万有引力定数を G とする。

6-3-1. 惑星の中心から半径 $a/2$ までは密度 ρ_c 、その外側（半径 $a/2$ から a まで）は密度 ρ_m とする。この惑星が、惑星の中心から距離 s にある単位質量の質点におよぼす万有引力のポテンシャル U を (i) $s > a$ 、(ii) $0 \leq s \leq a$ のそれぞれについて求めよ。ただし、 U は全領域で連続し、 $\lim_{s \rightarrow \infty} U = 0$ とする。

6-3-2. 6-3-1 のポテンシャルによる力 f を求めよ。また、 ρ_c がある正の値をとるとき、 $\rho_m=0$ 、 $\frac{3}{7}\rho_c$ 、 ρ_c の 3 通りの場合について、 f を s の関数として図示せよ。図は定性的で良いが、 $s=0$ 、 $\frac{1}{2}a$ 、 a での f の値を図に示すこと。

[7] 次の文章を読んで以下の問い合わせに答えよ。

放射壊変とは不安定な原子核が時間の経過とともに安定な原子核に変化することであり、壊変の際には過剰なエネルギーとして電磁波や粒子が放出される。放射壊変にはいくつかの壊変様式があり、それぞれ放出される電磁波や粒子の種類が異なる。_[1] α 壊変は質量数の大きい放射性核種において見受けられ、壊変によって原子核から (ア) が放出される。一方 β 壊変には主に 3 つの様式がある。 β^- 壊変では原子核から (イ) と (ウ) が放出され、その際 (エ) が (オ) に変化し、原子番号は (カ)。これに対し β^+ 壊変では逆に (オ) が (エ) に変化する。また β 壊変のもう一つは _[2] 電子捕獲壊変と呼ばれる様式である。放射壊変は確率的現象であり、壊変する核種を親核種、壊変によって生じる核種を娘核種とよぶ。親核種が減少する速度 ($-dN/dt$) は親核種の個数 N に比例するため、次の式が成り立つ。

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad \text{式(1)}$$

なお、 λ は親核種の種類に固有の値であり、(キ) と呼ばれる。

7-1. (ア) から (キ) に下の語群から適切な語句を選んで入れ、文章を完成させよ。

語群

陽子 核子 中性子 陽電子 電子 ニュートリノ 反ニュートリノ
半減定数 壊変定数 平衡定数 トリチウム原子核 ヘリウム原子核 リチウム原子核
1つ増加する 1つ減少する 倍増する 半減する 變化しない

7-2. 下線部 [1] にある「 α 壊変」を起こす親核種とそこから生じる娘核種の組み合わせにはどのようなものあるか。例を二つあげよ。

7-3. 下線部 [2] にある「電子捕獲壊変」とはどのような壊変様式か。他の β 壊変との違いを明らかにしながら、3 行程度で簡潔に説明せよ。

7-4. ある放射性核種 A は放射壊変により核種 B に変化するが、B も不安定核種であり、放射壊変により核種 C へと変化する。ある時刻における核種 A, B の個数をそれぞれ N_A , N_B 、時刻 $t=0$ における核種 A, B の個数をそれぞれ N_{A0} , N_{B0} 、核種 A, B の (キ) をそれぞれ λ_A , λ_B としたとき、次の問い合わせに答えよ（計算の過程も示すこと）。

7-4-1. 核種 A については式(1)が成立することを利用し、 N_A を N_{A0} , λ_A , t を用いて表せ。

7-4-2. A の半減期を、 λ_A を用いて表せ。

7-4-3. 核種 B については親核種の壊変が影響するため、式(1)が成り立たない。核種 B について成り立つ微分方程式を書け。

7-4-4. 核種 A に関する式(1)と、上で求めた B に関する微分方程式を解き、 N_B を N_{A0} , N_{B0} , λ_A , λ_B , t を用いて表せ。

7-5. 放射壊変の地球惑星科学における重要な応用のひとつに年代測定がある。年代測定には様々な手法があるが、岩石試料などにはアイソクロン法が適用されることが多い。アイソクロン法とはなにか、その原理を 5~10 行程度で説明せよ。図を描いててもよい。

7-6. 年代測定によって得られた年代値の確からしさ（確度）を高めるには、全ての年代測定法に共通の必要条件がいくつか存在する。その必要条件を 2 つ挙げ、なぜそれらが重要なのか、それぞれ 3~5 行程度で説明せよ。

7-7. ある隕石からコンドリュールを取り出して年代を測定したところ、Pb-Pb 法では 45.6 ± 0.1 億年という年代が得られ、一方 Rb-Sr 法では 43.6 ± 0.8 億年という結果が得られた。分析に問題がないとすれば、年代の不一致は何が原因と考えられるか。5 行程度で答えよ。

[8] 地球内部の化学組成と温度の見積もりに関する以下の問い合わせよ。

8-1. 地球内部の化学組成は、太陽系の元素存在度を基に推定されている。では太陽系の元素存在度はどのように見積もられているか、3行程度で書きなさい。

8-2. 最上部マントルの岩石に含まれる鉱物を、主要なものから2つ挙げなさい。

8-3. 上で答えたもののうち、Mg/Si モル比が高いものについて、その化学式を書きなさい。

8-4. 上部マントルの岩石の Mg/Si モル比はおよそいくつか？上で答えた2つの主要鉱物の Mg/Si 比から考えなさい。

8-5. 太陽系の元素存在度から得られる Mg/Si モル比はおよそ 1.1 である。この値は、上部マントルの値と大きく異なる。このことから、下部マントルやコアの化学組成を論じなさい（5 行程度）。

8-6. 地表付近の地温勾配は約 0.03 度/m である。これは、アセノスフェアの地温勾配よりもはるかに大きい。熱の伝わり方が両者でどのように異なるか、述べよ。

8-7. 地震学的観測の情報から、マントル遷移層の温度を推定する方法について、3行程度で記しなさい。

8-8. 8-6 と 8-7 をふまえて、地表から遷移層までの温度分布を図示しなさい。

8-9. コアの温度は如何にして見積もることができるか、述べなさい。また、その推定値の誤差を生む原因について、書きなさい（あわせて 5 行以内）。