

専門科目（午前）

2 4 大修

地球惑星科学

時間 9:30 ～ 12:00

注意事項

- 1.以下の4問（1～4）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
- 2.解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
- 3.各解答用紙に必ず問題番号（1～4）及び受験番号を記入せよ。

[1]

1-1. 実数関数 $u(r, t)$ についての熱伝導方程式

$$\frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = \kappa \Delta u(r, t) \quad (1)$$

について以下の問に答えよ。ここで、 Δ はラプラシアンで、 κ は正の定数である。

1-1-1. 空間一次元 $u = u(x, t)$ の場合を考える。 $u(x, t)$ は変数分離できるとし、境界条件 $u(0, t) = u(L, t) = 0$ を満たす $[0, L]$ 区間の一般解を求めよ。

1-1-2. 問 1-1-1. の場合について、境界条件に加えて初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ を満たす解を、無限級数と定積分を組み合わせた形で求めよ。

1-1-3. 空間三次元で、半径 a の球を考える。表面は常に $u = 0$ に保たれているとし、時刻 $t = 0$ での分布が $f(r)$ (r は球の中心からの距離) であったとき、球内の分布 $u(r, t)$ を求めよ。ただし、球座標 (r, θ, ϕ) でのラプラシアンが

$$\Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rA)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} \quad (2)$$

であることは使っていい。

1-2. 実数関数 $u(x, t)$ についての 1 次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

を解く。ここで c は正の定数である。

1-2-1. $u(x, t)$ は変数分離できるとし、境界条件 $u(0, t) = u(L, t) = 0$ を満たす $[0, L]$ 区間の一般解を求めよ。

1-2-2. 問 1-2-1. の境界条件に加えて、初期条件 $u(x, 0) = f(x)$, $\partial u(x, t)/\partial t|_{t=0} = g(x)$ を満たす解を求めよ。

1-2-3. (3) 式を別の方法で解く。 $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ として、(3) 式の一般解が、任意の実数関数 F, G によって、

$$u(x, t) = F(\xi) + G(\eta) \quad (4)$$

と書けることを示せ。

1-2-4. 問 1-2-3. と同じ初期条件のもとで、(4) 式は、

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (5)$$

と書けることを示せ。

[2]

2-1. 化学平衡について次の問に答えよ。

2-1-1. 次の文を読み、空欄(1)~(3)にあてはまる数式と空欄(A)に入る語句をそれぞれ答えよ。

化合物 A, B, C および D についての化学反応 $aA + bB = cC + dD$ を考える。ただし a, b, c および d はそれぞれ化学量論係数である。絶対温度 T におけるこの反応のギブス自由エネルギー変化 (ΔG_R) は標準自由エネルギー変化 (ΔG_R^0) を用いて

$$\Delta G_R = \text{(1)}$$

と書き表される。ただし R を気体定数、[X]を各化合物 X の濃度とする。

反応が平衡状態のとき、 $\Delta G_R = 0$ であるので、平衡定数を K とすると

$$\Delta G_R^0 = \text{(2)}$$

である。また標準状態(25°C、1 気圧)において ΔG_R^0 は常用対数を用いると

$$\Delta G_R^0 = -5.71 \log K \quad (\text{kJ/mol})$$

である。一方、標準生成自由エネルギー (ΔG_f^0) とは (A) である。これを用いて ΔG_R^0 は以下の式から求まる。

$$\begin{aligned} \Delta G_R^0 &= [\text{生成系のエネルギー}] - [\text{反応系のエネルギー}] \\ &= [c \Delta G_f^0 C + d \Delta G_f^0 D] - [a \Delta G_f^0 A + b \Delta G_f^0 B] \end{aligned}$$

また ΔG_f^0 の温度依存性は標準生成エンタルピー (ΔH_f^0) と標準エントロピー (S^0) を用いて近似的に

$$\Delta G_f^0 = \text{(3)}$$

と書き表される。

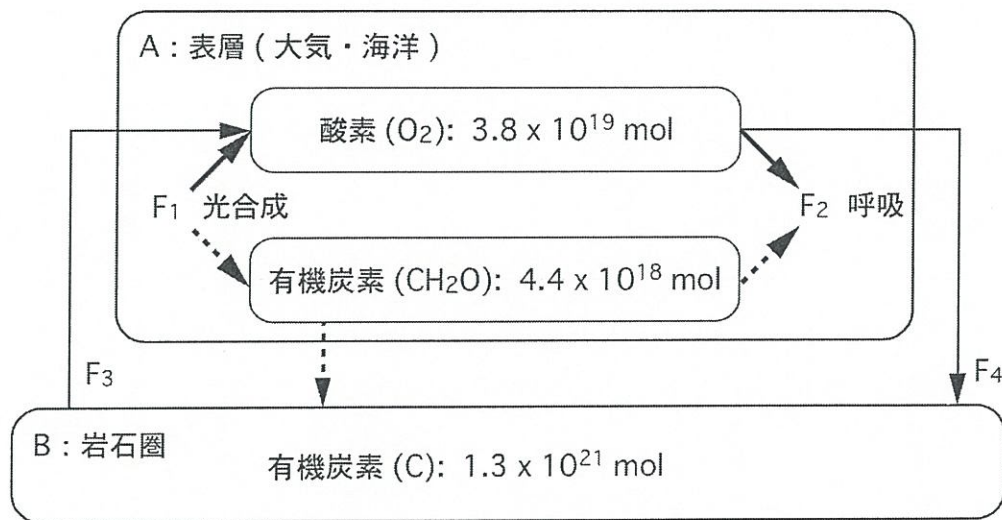
2-1-2. 炭酸カルシウム CaCO_3 の溶解度積 $[\text{Ca}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}]$ を求めよ。ただし、 CaCO_3 、 Ca^{2+} および CO_3^{2-} の標準生成自由エネルギーはそれぞれ -1129、-554 および -528 kJ/mol とする。また非理想性は考慮しないものとする。

2-1-3. 気相の $\text{CO}_{2(g)}$ が水溶液に溶解すると炭酸は $\text{CO}_{2(aq)}$ 、 HCO_3^- および CO_3^{2-} の三種の化学形態をとる。現在の海水(pH=8.2)で炭酸が溶解平衡にあるすると、溶存炭酸のうち HCO_3^- の量比が最も多いことを定量的に示せ。ただし CO_2 のヘンリー定数 K_H を $10^{-1.5} \text{ mol kg}^{-1} \text{ atm}^{-1}$ 、炭酸の第一、第二解離平衡定数はそれぞれ $K_1 = 10^{-6.4}$ 、 $K_2 = 10^{-10.3}$ とする。必要なら大気 CO_2 分圧を $10^{-3.5} \text{ atm}$ としてよい。

2-1-4. 現在の海洋においてサンゴの成長等により炭酸塩が沈殿したとすると、これは大気 CO_2 分圧の増減にどのような効果をもたらすか。「質量作用の法則」という語を用いて説明せよ。(5 行程度)

(次ページに続く)

- 2-2. 地球表層の物質移動過程のうち、下の図は酸素(O_2)に関わる物質収支を簡略化したボックスモデルであり、枠内の数字は各リザーバーの総物質量である。大気海洋系を表すシステム A の内部で、酸素の生成と消費の過程はそれぞれ光合成 (F_1) と呼吸 (F_2) である。両者は 100 年ほどの時間スケールではバランスしており、大気海洋系の酸素量はほぼ一定に保たれていると考える。より長期的な酸素濃度の増減を考慮するには岩石圏を表すシステム B との間で酸素の生成 (F_3) および消滅 (F_4) を考慮する必要がある。なお岩石圏 B の有機炭素はシステム A の生物活動から隔離された地殻内の炭素を表す。



* 実線と点線の矢印はそれぞれ酸素と炭素の移動を表す

- 2-2-1. 光合成 (F_1) のフラックスは現在 8.7×10^{15} mol/年 と見積もられている。この時 F_1 に対する酸素の平均滞留時間 τ を求めよ。
- 2-2-2. 呼吸 (F_2) による酸素消費反応が、全酸素量 M についての一次反応であると仮定すると、その反応速度定数は $1/\tau$ となる。この系で定常状態にある酸素量 M_1 は光合成フラックスが変化すると次の定常状態 M_2 へ向かって変動する。このとき次の定常状態への到達度が $1/e$ になる時間が平均滞留時間 τ であることを示せ。ただし M の時間変化を微分方程式で表し、それを解くこと。
- 2-2-3. 長期的な酸素生成過程 (F_3) のフラックスは大陸成長に伴って増加し、現在の値はおおよそ 2×10^{13} mol/年 と見積もられている。この F_3 は具体的にどのような酸素生成過程であるかを説明せよ。またこの過程により地球の歴史を通して放出された酸素の総量はいくらか、考え方も含めて答えよ。(あわせて 5 行程度)
- 2-2-4. 現在の大気海洋系にある全酸素量(O_2)は前問で見積もった総酸素放出量と比べると圧倒的に少ない。残りの余剰酸素は長期的な過程 F_4 によって消費されたと考えられる。この消費過程を二つ例示せよ。またこれらの過程を経た結果、余剰酸素は現在どのような化学形態でどこに存在しているか述べよ。(あわせて 5 行程度)

[3]

- 3-1.** グラファイト、ダイヤモンドの標準状態 (1 気圧 298K)での熱力学データは次のとおりである。これを用いて以下の設問に答えよ。

	エンタルピー (J mol ⁻¹)	エントロピー (J mol ⁻¹ K ⁻¹)	モル体積 (cm ³ mol ⁻¹)
グラファイト	0	5.7	5.3
ダイヤモンド	1895	2.4	3.4

(ただし 1 cm³ = 0.10 J bar⁻¹ = 0.024 cal bar⁻¹ とせよ)

- 3-1-1. 1 気圧で安定な炭素の鉱物相はグラファイトである。その理由を熱力学的に考察し、3 行以内で答えよ。
- 3-1-2. 一般に相平衡図で 2 相の境界線の傾きが $dP/dT = \Delta S/\Delta V$ であらわされる事を証明せよ。途中経過も書くこと。ただし、P、T はそれぞれ圧力と温度を、 ΔS および ΔV はそれぞれ 2 相のエントロピーおよびモル体積の差である。
- 3-1-3. 一般に融解曲線は正の勾配を持つ (高压ほど融点が高くなる) 場合が多い。一般の化合物において、融解曲線が負の勾配を持つのはどのような場合か。実例を挙げ、その理由を 5 行以内で説明せよ。
- 3-1-4. 以上の知識を用いて炭素の相平衡図を圧力 0-15GPa 温度 0-5000K の範囲で推定し図に描け。考察の過程も記すこと。ただし 1 気圧での融点を 4000K と仮定せよ。

- 3-2.** キンバーライトパイプおよび超高压変成岩中でダイヤモンドが発見されている。1 気圧では準安定であるダイヤモンドがこれら 2 つに出現する理由を各々 5 行以内で説明せよ。必要により説明図を描くこと。

- 3-3.** グラファイトとダイヤモンドは鉱物の物性 (密度・色・へき開) が大きく異なる。グラファイトとダイヤモンドにおける炭素の原子配置をそれぞれ図示せよ。さらにこれらの 3 つの物性が 2 つの鉱物間で異なる理由をそれぞれにつき各 3 行以内で説明せよ。

[4]

以下の各問に答えよ。使用している座標系を明確に示し、結果の導出過程を正確に記述すること。適宜、必要な物理量を明記して導入してよい。非相対論の範囲で考えてよい。

4-1.

4-1-1. 半径 a の金属の導体球を鉛直上向きの一様な磁場 (磁束密度 B) の中におく。この導体球を、中心を通り磁場の方向と平行な z 軸の周りに、角速度 ω で回転させる。この時、導体球の各点における電場を求めよ。さらに、この導体球の「北極」と「赤道」の電位差を求めよ。

4-1-2. 次に、外部から与えている磁場は、永久磁石で作っているとして、永久磁石を z 軸のまわりで角速度 $-\omega$ で回転させ (上の場合と逆回転)、導体球の回転は止める。この時、導体球の各点での電場と、導体球の「北極」と「赤道」の電位差を求めよ。

4-2. 半径 a の球の表面に、面密度 σ で一様に電荷を分布させる。球の中心を通る z 軸のまわりに、この球を角速度 ω で回転させたとき、球の中心での磁束密度を求めよ。この場合、外部から与える磁場はゼロとする。

4-3. 静止している半径 a の球内に電荷 Q を一様に分布させる。この時、この球の「北半球」全体にかかる正味の力を求めよ。この場合、外部から与える磁場はゼロとする。

(次ページに続く)

4-4. 真空中の Maxwell の方程式を考える。電場は E , 磁場 (磁束密度) は B , 電荷密度は ρ_e , 電流密度は j_e と表すことにする。磁気単極子が存在すると仮定し, 磁荷密度を ρ_m , 磁荷電流密度を j_m と表す。電場の Poisson の式 $\nabla \cdot E = \rho_e/\epsilon_0$ に対応して, 磁場の Poisson の式は $\nabla \cdot B = \mu_0 \rho_m$ と, 記述できるとする。ここで, ϵ_0 は真空中の誘電率, μ_0 は真空中の透磁率, c は光速をあらわす。

4-4-1. Maxwell の方程式で, 電荷 (密度) の時間変化は, 電流 (密度) の流入流出によることを表す電荷の保存則 $(\partial \rho_e / \partial t) + \nabla \cdot j_e = 0$ が成り立っていることを示せ。

4-4-2. 電荷の保存則と同様に磁荷の保存則 $(\partial \rho_m / \partial t) + \nabla \cdot j_m = 0$ が成り立つとする。この磁荷の保存則が成り立つような Maxwell の方程式を求めよ (4 つの式全部を記述すること)。

4-4-3. ここで, 電場 E と磁束密度 B に次のような E' と B' への変換を考える。(α は定数)

$$\begin{aligned} E' &= E \cos \alpha + c B \sin \alpha \\ B' &= B \cos \alpha - \frac{E}{c} \sin \alpha \\ q'_e &= q_e \cos \alpha + \frac{q_m}{c} \sin \alpha \\ q'_m &= q_m \cos \alpha - c q_e \sin \alpha \end{aligned}$$

4-4-3-1. $(1/2)\epsilon_0 E^2 + (1/(2\mu_0))B^2$, $(1/\mu_0)E \times B$ は, この変換での不変量であることを示せ。

4-4-3-2. 2 つの磁荷 q_m と q'_m との間に働く「磁荷のクーロンの法則」は, 次のように表せるものとする。

$$F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m q'_m}{r^2} \frac{r}{r}$$

電荷 q_e と磁荷 q_m をもつ粒子が, 電場 E と磁場 (磁束密度) B の中を, 速度 v で運動しているとき, この粒子に働く電磁力は, E と B の系でも, E' と B' の系でも, 同じ形式で表せるはずである。このことから, 電荷 q_e と磁荷 q_m をもつ粒子が, 電場 E と磁場 (磁束密度) B の中を, 速度 v で運動しているとき, この粒子に働く電磁力 F を, E と B の系で表せ。

専門科目（午後）

24 大修

地球惑星科学

時間 13:30 ～ 16:00

注意事項

- 1.以下の4問（5～8）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
- 2.解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
- 3.各解答用紙に必ず問題番号（5～8）及び受験番号を記入せよ。

[5]

5-1. プレートテクトニクスに関する以下の文章の空欄 1~6 にあてはまる言葉を書きなさい。

「地球の表面は厚さ約 1 の何枚かの剛い板で覆われており、それらが粘性の低い 2 の上を運動している。地球表面上の 3、4、5などの主要な変動は、それらの板の 6で起こる」

5-2. 海洋底磁気異常の成因について、5行程度で書きなさい。

5-3. ひとつの中央海嶺沿いであっても、プレートの拡大速度は異なっている。このことはプレートテクトニクスの理論によってどう説明されるか、書きなさい。

5-4. 海洋プレートの層状構造につき、プレートの底までの図を書いて説明しなさい。それぞれの層を成す岩石名とその成因についても記すこと。また、地殻とマン托ルの境界の位置も図に書き入れなさい。

5-5. 岩石学的に定義される地殻とマン托ルの境界は、地震学的に観測されるモホロヴィチッチ不連続面とどう異なるか、説明しなさい。

5-6. 海洋プレートの底は地震学的にどう定義されるか、書きなさい。

5-7. 海洋底の年代を決める方法を2つ、それぞれ2行程度で書きなさい。

5-8. 中央海嶺におけるマグマ生成のメカニズムにつき、中央海嶺下の温度構造とマン托ルのソリダス温度を示しながら、説明しなさい。

5-9. 海洋地殻の厚さを決めているメカニズムは何か、3行程度で答えなさい。

5-10. ホットスポットにおけるマグマ生成メカニズムは中央海嶺のそれとどう異なるか、ハワイを例にとって、ハワイ火山下の温度構造とマン托ルのソリダス温度を示しながら、説明しなさい。

5-11. 中央海嶺とホットスポットで生成されるマグマの化学的性質にどのような相違点があるか、3行程度で答えなさい。

[6]

光の干渉について考える。図1のように、細長いスリットがついた大きなつい立てに平面波を垂直に入射させると、スリットを通過した光波はつい立ての後方で干渉し、後方に置いたスクリーン上に明暗の縞模様（干渉縞）を形成する。スリットの形状を様々に変えたときの干渉縞の変化について、以下の問いに答えよ。つい立てとスクリーンは距離 R 離れて平行に配置しており、スクリーン上でスリットの幅と平行な方向を x 軸にとる。 x 軸に垂直な方向にはスリットは十分に長いとする。時刻を t 、入射光の角振動数、振幅をそれぞれ ω 、 A とし、スリット上での光波を $f(t) = A \cos \omega t$ とする。

6-1. 図2は図1を上から見たものである。ここでは、原点 O を挟んで2つのスリット S_1 、 S_2 が間隔 D で平行に配置されている場合を考える。各スリットの幅は D に比べて十分に小さく無視できるものとする。

6-1-1. 図2のようにスクリーン上に原点 O' をとり、 x 軸上の点 P の座標を x とする。スリット S_1 、 S_2 から点 P までの距離をそれぞれ r_1 、 r_2 とするとき、距離の差 $r_2 - r_1$ は近似的に $r_2 - r_1 = Dx/R$ と表せることを示せ。ただし、 D 、 x は R に比べて十分小さいとする。

6-1-2. 点 P に到達する光波は、各スリットを通過した光波の重ね合わせである。点 P における光波を $f_P = K \cos(\omega t - \phi)$ (K は振幅、 ϕ は位相定数) の形で表すとき、 K を A 、 D 、 R 、 x 、および入射光の波長 λ を用いて表せ。ただし、 R は D に比べて十分大きく、各スリットから点 P に到達する光波の振幅の違いは無視できるとする。

6-1-3. 問 6-1-2. の f_P で表わされるスクリーン上の光波を干渉縞と呼び、その強度は振幅の2乗に比例する。干渉縞の強度が極大、極小となる x の条件を D 、 R 、 λ を用いてそれぞれ表せ。

6-1-4. 入射光として波長 $\lambda + \Delta\lambda$ の光波を入射させると、スクリーン上で干渉縞の強度が極大となる位置が問 6-1-3. で求めた波長 λ の場合の極大の位置から Δx だけずれる。 Δx を D 、 R 、 $\Delta\lambda$ を用いて表せ。

6-1-5. ここでは、入射光として様々な波長を含む光波を考えよう。この場合、干渉縞の強度が極大となる位置が波長によって異なるため、入射光はスクリーン上で分光される。波長の違い $\Delta\lambda$ に相当する干渉縞の極大値の位置の違いが、波長 λ の光波の干渉縞の隣り合う極大値と極小値の間隔とちょうど一致する場合、波長 λ と波長 $\lambda + \Delta\lambda$ の光波はぎりぎり分解できていると見なす。このとき $\lambda/|\Delta\lambda|$ はどのように表せるか。

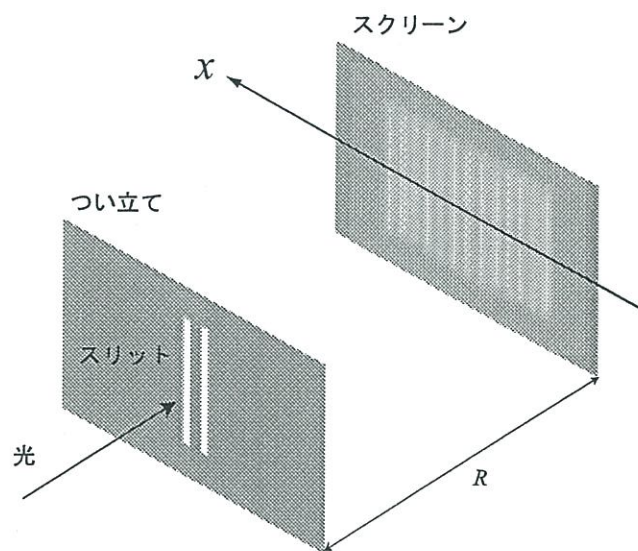


図 1

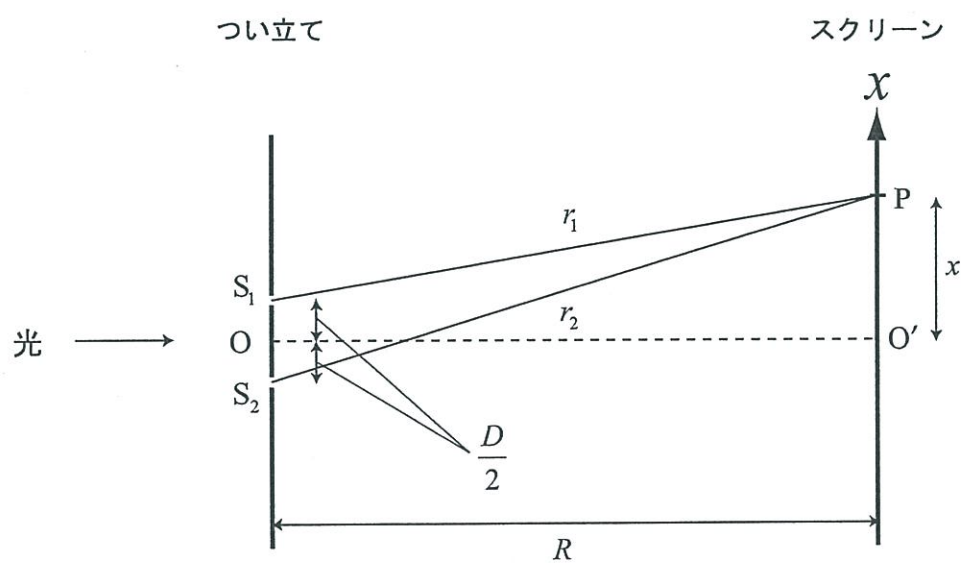


図 2

6-2. 図3のように、原点 O を中心とした幅 D のスリットを考える。これは、問 6-1. のスリットを S_1 から S_2 の間に連続的に並べたものとして考えることができる。

6-2-1. 問 6-1. と同様にスクリーン上に原点 O' をとり、 x 軸上の点 P の座標を x とする（図 3）。点 P における光波（干渉縞）を $f_P = K \cos(\omega t - \phi)$ (K は振幅、 ϕ は位相定数) の形で表すとき、 K を A 、 D 、 R 、 x 、および入射光の波長 λ を用いて表せ。

6-2-2. スクリーン上の原点から測って干渉縞の強度が初めて極小値をとるときの $x(> 0)$ を求めよ。このときの x は、大きさ D の鏡（またはレンズ）をもつ望遠鏡で無限遠の天体（点光源）を観測したときの天体像の広がり の程度に相当する。

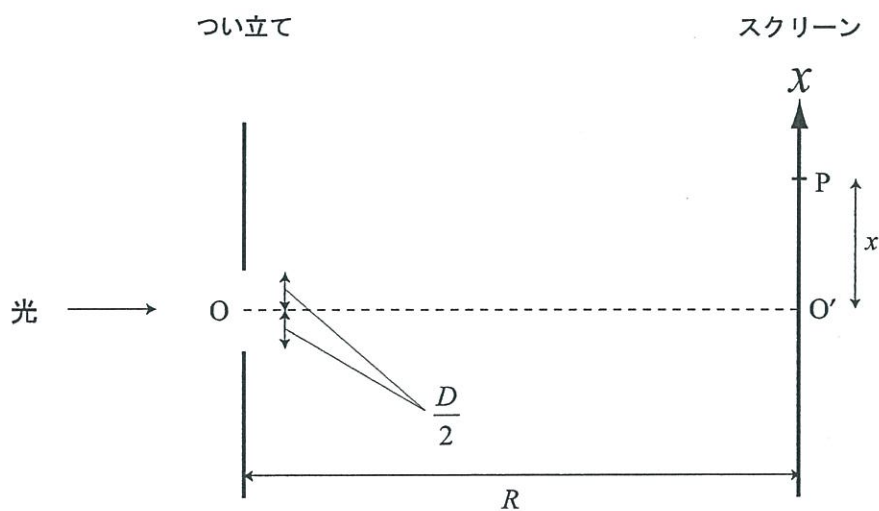


図 3

6-3. 図4のように、幅 D の2つのスリットが原点を挟んで間隔 $B(> D)$ で平行に配置されている場合を考える。

6-3-1. 問6-1.と同様にスクリーン上に原点 O' をとり、 x 軸上の点 P の座標を x とする (図4)。点 P における光波 (干渉縞) を $f_P = K \cos(\omega t - \phi)$ (K は振幅、 ϕ は位相定数) の形で表すとき、 K を A 、 D 、 B 、 R 、 x 、および入射光の波長 λ を用いて表せ。

6-3-2. スクリーン上の原点から測って干渉縞の強度が初めて極小値をとるときの $x(> 0)$ を求めよ。また、このときの x を問6-2-2.で求めた x と比較し、スリットを望遠鏡に見立てた場合の解像度はどちらが高いか理由とともに答えよ。

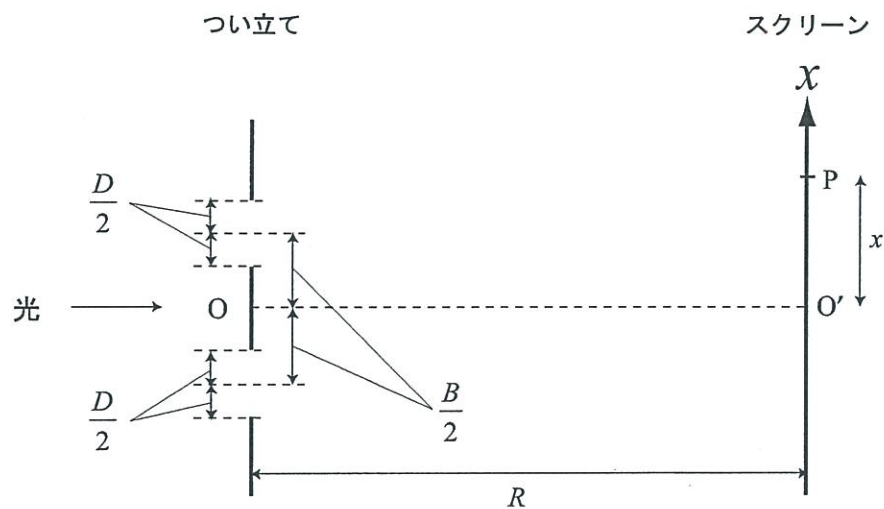


図4

[7] 次の文章を読んで以下の問いに答えよ。

近年、携帯電話やパソコン、自動車部品といった身の回りのハイテク機器に欠かせない資源である希少金属、いわゆる「レアメタル」が大きく注目されている。どの元素をレアメタルと呼ぶかは定義により異なるが、ここでは図1の周期表に示した47元素をレアメタルとする。これらは一般的に(1)地球表層(地殻)での存在量が非常に少ない金属や、存在量は豊富でも(2)分離・精製によってその元素単体を得ることが難しい金属であり、鉄、アルミニウム、銅といった「ベースメタル」と比較し入手が困難であるため、世界中で争奪戦が起きている。

元素(ア)は(1)の性質を持つレアメタルで、大陸地殻平均濃度(注*)は $1.3 \mu\text{g/g}$ と低い。(ア)は半導体の材料として用いられるほか、光センサーにも使われる。白金族元素である(イ)の大陸地殻平均濃度は $0.0015 \mu\text{g/g}$ と極端に低い。(イ)は(A)として用いられる。また、(イ)を利用したクロスカップリングによる有機合成反応の開発により、2010年に日本人がノーベル化学賞を受賞した。

(2)の性質を持つレアメタルとして元素(ウ)が挙げられる。(ウ)の大陸地殻平均濃度は $4320 \mu\text{g/g}$ であり、これはベースメタルである銅(大陸地殻中 $27 \mu\text{g/g}$)の160倍であるが、その生産量は銅のわずか100分の1以下である。(ウ)の用途として(B)が挙げられる。また、希土類元素(レアアース)も(2)の性質を持つ。例えば元素(エ)の大陸地殻平均濃度は $20 \mu\text{g/g}$ であり、元素(ア)の15倍もある。また、レアアースを高濃度で含有する鉱石も存在する。しかし(2)の性質を持つため、その希少性は高い。元素(エ)、および同じレアアースである(オ)は(C)に用いられる。現在レアアースはその90%以上が中国で産出されており、日本も大部分を中国からの輸入に頼っている。

(注* 大陸地殻平均濃度はレアメタル便覧による。)

7-1. 上記文章の(ア)から(オ)について、元素名と元素記号の双方をそれぞれ答えよ。なお、元素(ア)から(オ)の周期表における位置は図1に示されている。

7-2. (A)から(C)に下の語群から最適な語句を選んで入れよ(重複不可)。

語群

光ファイバー	高性能磁石	耐熱ガラス	車の排ガス浄化装置
原子時計	液晶パネルの電極	航空機部品	難燃助剤

7-3. 元素(ウ)と(エ)が(2)の性質を持つ化学的理由は異なる。どのような違いがあるか、5行程度で述べよ。

7-4. 元素(ウ)の地殻中における主要鉱石を1つ挙げ、その名称および化学式を書け。また、二重下線部にある「レアアースを高濃度で含有する鉱石」とは何か、名称を書け。

7-5. 岩石中に含まれる元素（ウ）の濃度を吸光光度分析により定量することを考える。このとき以下の問いに答えよ。

7-5-1. 吸光光度分析の原理を, Lambert-Beer の法則を説明しつつ 5 行程度で述べよ。

7-5-2. 吸光光度分析を行うには, まず岩石試料を分解・溶液化する必要がある。岩石の分解法にはアルカリ融解法と酸による分解法がある。それぞれどのような特徴を持つ分解法か, 両者の長所と短所に触れながら 5 行程度で説明せよ。

7-5-3. 岩石試料を硫酸とフッ化水素酸で分解し, 100mL のメスフラスコに移す。このメスフラスコにリン酸 2mL と 3%過酸化水素水 5mL を加え, 最終的に 10%硫酸で 100mL 定容とし, 吸光光度計で測定した。この実験を同じ岩石について 5 回繰り返し、結果が表 1 である。実験 1~5 で得られた, 岩石中の元素（ウ）の濃度をそれぞれ求めよ。なお, 濃度既知である元素（ウ）標準溶液の分析結果は表 2 の通りである。

7-5-4. 7-5-3 で見られるように, 実験 1~5 の結果は必ずしも一定ではない。このようなばらつきが生じる原因について, 5 行程度で考察せよ。

7-5-5. 表 1 の結果を平均し, 本実験から推定されるこの岩石の元素（ウ）の濃度を求めよ。また, 分析の繰り返し再現性を求めよ。計算の過程も書くこと。

7-6. 始原的隕石である CI コンドライトの化学組成を調べたところ, 元素（ア）（イ）（ウ）（エ）の元素存在度はそれぞれ 31 $\mu\text{g/g}$, 0.55 $\mu\text{g/g}$, 440 $\mu\text{g/g}$, 0.46 $\mu\text{g/g}$ であった。地球は CI コンドライトの化学組成を持つ始原物質から作られたと仮定し, 以下の問いに答えよ。

7-6-1. （ア）の地殻中の存在度が CI コンドライトより低い理由を簡潔に述べよ。

7-6-2. （イ）の地殻中の存在度が CI コンドライトより低い理由を簡潔に述べよ。

7-6-3. 元素（ウ）（エ）は逆に地殻中の方がコンドライトより高濃度である。この原因を 5 行程度で述べよ。

7-7. 放射壊変を利用した年代測定法のうち, 親核種, 娘核種とも図 1 に示したレアメタルに属するものにはどのようなものがあるか。例を 1 つ挙げ, その地球化学または宇宙化学における応用について述べよ（5 行程度）。

[8]

以下の各問に答えよ。

- 8-1. 3次元ベクトル空間 R^3 の正規直交基底を $\{e_1, e_2, e_3\}$ とする。(この順に右手系をなし, $e_1 \times e_2 = e_3$ であるとする。) ベクトル $x \in R^3$ は, 3つの実数 x_1, x_2, x_3 によって, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ と表せる。このベクトルを e_3 軸の周りに微小角 $\delta\theta$ だけ回転させたとき, 回転後のベクトル x' はどのように表されるか。 $|\delta\theta| \ll 1$ として $\delta\theta$ の2次以上の項を無視し,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = (E + \delta\theta L_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

としたときの行列 L_3 を求めよ。ただし, E は単位行列である。

- 8-2. $n = (n_1, n_2, n_3) \in R^3$, $|n| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 1$ とする。ベクトル x を, ベクトル n を軸としてその周りに微小角 $\delta\theta$ だけ回転させたベクトル x' は, どのように表されるか。 $\delta\theta$ の2次以上の項を無視し,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = (E + \delta\theta L) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

としたときの行列 L を求めよ。

- 8-3. 3行3列の実行列 U を, $U = E + \delta\theta L$ とおく。ただし, L は問8-2. で求めた行列である。 $\delta\theta$ の2次以上を無視する近似において, 行列 U は直交行列であることを示せ。

- 8-4. $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$ とし, 各ベクトルの大きさは微小で $|a|, |b| \ll 1$ とする。ベクトル $x = (x_1, x_2, x_3)$ を, ベクトル a を軸としてその周りに微小角 $|a|$ だけ回転させる変換を表す行列を $V(a)$ と書くことにする。このとき,

$$V(b)V(a)x = V(c)x$$

を満たすベクトル $c \in R^3$ を, 微少量 $|a|, |b|$ の2次以上を無視する近似の範囲において求めよ。

また, 同じ近似の範囲で, 次のベクトル z の成分 (z_1, z_2, z_3) を求めよ。

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \{V(b)V(a) - V(a)V(b)\} x$$

8-5. 有限の角度 θ の回転は、微小角の回転を繰り返すことで得られる。

8-5-1. θ を実数、 m を十分大きな自然数とし、 $|\theta/m| \ll 1$ とする。

$$\left(E + \frac{\theta}{m}L\right)^m = E + d_1(\theta L) + d_2(\theta L)^2 + d_3(\theta L)^3 + \dots$$

を満たす d_1, d_2, d_3 を求めよ。ただし、 L は問 8-2. で求めた行列である。

なお、 $1/m$ の 2 次以上の微少量は無視せよ。

8-5-2. 正方行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を次のように定義する。

$$\exp(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m$$

ただし、 $0! = 1$, $A^0 = E$ である。

ベクトル $x \in R^3$ を、単位ベクトル $n \in R^3$ ($|n| = 1$) の周りに角度 θ だけ回転させる変換を表す行列を $W(n, \theta)$ と書くと、 $W(n, \theta) = \exp(\theta L)$ と表せる。ただし、 L は問 8-2. で求めた行列である。正方行列の指数関数の定義にもとづいて W を計算し、次が成り立つことを示せ。

$$W(e_1, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

8-5-3. 次のベクトル z の成分 (z_1, z_2, z_3) を求めよ。

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \left\{ W\left(e_1, \frac{\pi}{2}\right) W\left(e_2, \frac{\pi}{2}\right) - W\left(e_2, \frac{\pi}{2}\right) W\left(e_1, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$