

専門科目（午前）

25 大修

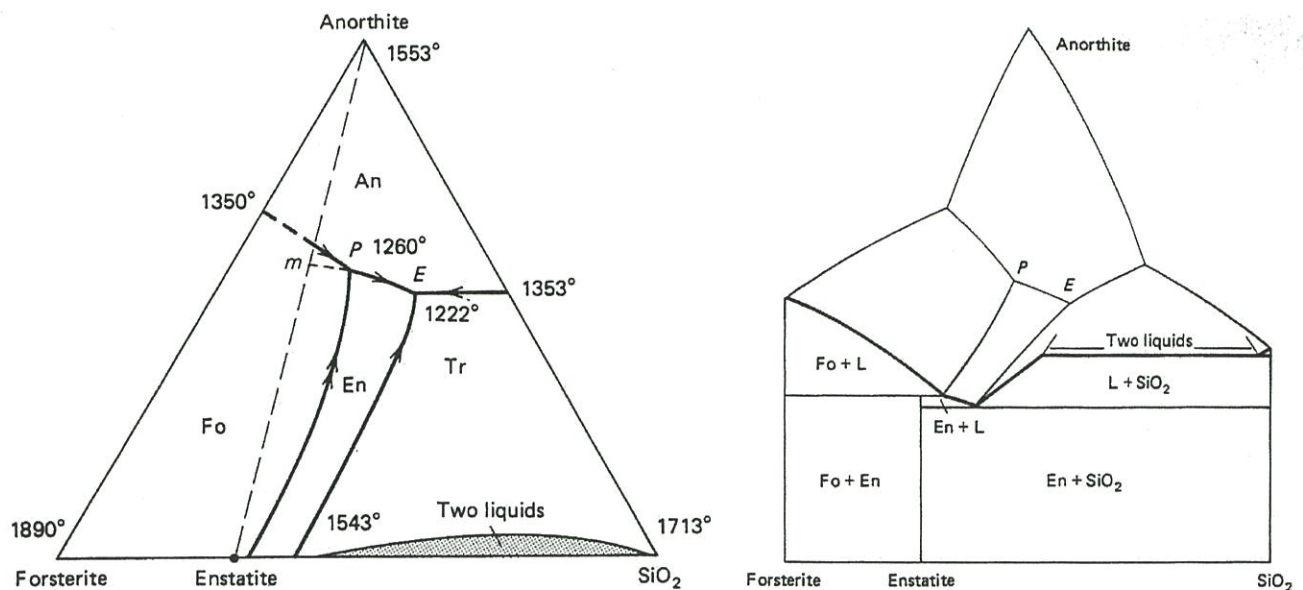
地球惑星科学

時間 9:30 ～ 12:00

注意事項

1. 以下の4問（1～4）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各解答用紙に必ず問題番号（1～4）及び受験番号を記入せよ。
4. [1]の問題については、所定の解答用紙に記入すること。

[1] 下に与える相平衡図に基づきプレート沈み込み帯でのマグマ生成に関する以下の設問に答えよ。



左図は無水、1 気圧条件下での Fo-An-SiO₂ 系の融解に関する相平衡図である。右図は相平衡関係を立体的に描いた模式図である。ただし、Fo: Forsterite (Mg₂SiO₄), En: Enstatite (MgSiO₃), An: Anorthite (CaAl₂Si₂O₈), Silica (SiO₂) である。(A.R.Philpotts, 1990 に基づく)

1-1. 岩石 A、岩石 B および岩石 C を解答用紙の相平衡図上にプロットしなさい。

岩石 A : 構成鉱物の重量比は (Fo50, En30, An20)

岩石 B : 構成鉱物の重量比は (En50, An40, Silica10)

岩石 C : 構成鉱物の重量比は (Fo10, An20, Silica70)

1-2. 岩石 A、岩石 B、岩石 C に化学組成に近いものを以下の岩石名からそれぞれ 1 つ選び解答せよ。

候補岩石名 : カンラン岩、ダナイト、エクログジャイト、ピクライト、カンラン石玄武岩、ソレイアイト質玄武岩、安山岩、デイサイト、流紋岩

1-3. A、B、C それぞれの組成のメルトが平衡を保ちつつ結晶化する時、それぞれのリキダス温度、リキダス鉱物、ソリダス温度を相平衡図から推定しなさい。ただし、正確な値が求められない場合はおよその数字でよい。

1-4. A の組成を持つマグマが化学平衡を保ちつつ完全に結晶化する時、メルトのたどる経路を解答用紙の図中に実線と矢印で記入せよ。

1-5. マグマから結晶化した鉱物が直ちに系から取り去られるとしたら、マグマの結晶化経路は 1-4. とどのように異なるか。最終固化温度、そのときのメルトの化学組成、最終固化温度における固結物の鉱物構成について 1-4. の場合と比較し 3 行以内で説明せよ。

- 1-6. 圧力 1GPa で水に飽和した Fo-En-An 系の融解関係を予測し、解答用紙の相平衡図に描きなさい。次の仮定とヒントを用いること。

仮定： 水に飽和した系での Fo, En, An, SiO₂ の融点はそれぞれ、1400, 1300, 1200, 1000℃とする。

1GPa 水に飽和した系で Fo-En-An の融解関係には An, Fo, En, SiO₂ 以外の鉱物相は出現しないとする。

相平衡図の P 点と E 点の温度はそれぞれ、900, 700℃とする。

ヒント： E 点で生成するメルトは流紋岩組成である。

水に飽和した系ではテクトシリケート鉱物の初相領域が他の鉱物に比べて狭まる。

(初相領域：その鉱物がリキダスで結晶化する組成範囲)

- 1-7. 1-6. の問題で求めた相平衡図に基づいて、マントル物質(岩石 A)と地殻物質(岩石 B) それぞれの融解に及ぼす H₂O の影響を説明せよ。さらにその内容を用いてプレートの沈み込み帯で花崗岩質マグマが生成する仕組みを説明せよ(説明は全部で 7 行以内とし、図を加えてもよい)。

- 1-8. 沈み込むプレート内の海洋地殻中で起こる一連の相転移を、海洋地殻上部と下部についてそれぞれ 5 行以内で説明せよ(図を加えてもよい)。それぞれの相転移が起こる深さも示すこと。ただし、以下のことを仮定する。

- ・海洋地殻の上部は中央海嶺玄武岩 MORB、下部は An50, Fo50 組成の斑レイ岩とする。

- ・プレートは深さ 600 km まで沈み込み、海洋地殻の温度は以下のようにする。

(深さ 100km, 400℃ ; 200km, 600℃ ; 400km, 900℃ ; 600km, 1400℃)

ただし海洋地殻内部の温度勾配は考慮しなくてよい。

- ・海洋地殻上部は沈み込み開始以前に 5wt% の H₂O を含むが海洋地殻下部はドライ(水を含まない)とする。

- ・斑レイ岩では鉱物粒径が大きいため An 成分と Fo 成分の反応は起こらず、相転移は鉱物ごとに進行する。

[2]

実数を成分とする行列を考える。 n を 2 以上の自然数とする。 n 次正方行列 A を考え、その i 行 j 列成分を a_{ij} と書くことにする。 A の行列式は

$$|A| = \sum \text{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad (1)$$

で定義される。ここで $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ は $(1, 2, \dots, n)$ を置換したものであり、それが偶置換のとき $\text{sgn} \sigma = 1$ で、奇置換のとき $\text{sgn} \sigma = -1$ である。 $\sum$ は全ての置換に対する和を表す。

- 2-1. A の転置行列を tA と書く。(1) 式を使って、 $|A| = |{}^tA|$ であることを示せ。
- 2-2. A で 2 つの行が等しければ、 $|A| = 0$ となることを (1) 式を使って示せ。
- 2-3. A のある行に他の行の定数倍を加えても、行列式の値は加える前と等しいことを (1) 式と問 2-2 の結果を使って示せ。
- 2-4. $i = j$ に対しては $a_{ij} = b + c$ で、 $i \neq j$ では $a_{ij} = b$ のとき、 $|A| = c^{n-1}(nb + c)$ であることを示せ。
- 2-5. $a_{11} \neq 0$ の任意の A に対して、 $(n-1)$ 次正方行列 B を使って $|A| = |B|/a_{11}^{n-2}$ と書けるとする。このとき、 B を求めよ。
- 2-6. A が直交行列のとき、 $|A| = -1$ ならば、 A は -1 を固有値に持つことを示せ。ここで、正方行列 A, C に対して、 $|AC| = |A||C|$ であることは使ってよい。
- 2-7. 前問 2-6 と同じ設定のとき、 $|A| = 1$ かつ n が奇数ならば、 A は 1 を固有値に持つことを示せ。

[3]

電磁波に関する次の問題に答えよ。答えの導出過程も丁寧に記述すること。単位系は何を使って
もよいが、この問題の中では統一すること。

Maxwell の方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

- 3-1. 真空中の Maxwell の方程式から、電磁波の電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の各々が満たすべき波動方程式を導出せよ。
- 3-2. 無限に広い真空中の電磁波の磁束密度 $\mathbf{B}$ を次の平面波で表すとき、磁束密度ベクトル $\mathbf{B}$ 、電場ベクトル $\mathbf{E}$ 、波数ベクトル $\mathbf{k}$ の3者の関係を1つの等式で示せ。

$$\mathbf{B} = B_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad B_0 \text{ 定数ベクトル, } \mathbf{r} \text{ 位置ベクトル, } \omega \text{ 角振動数, } t \text{ 時刻}$$

- 3-3. 真空中で角振動数 ω の平面波の電磁波（問 3-2 と同様に表せるとする）が、電気伝導度 σ の導体に入射すると、電磁波の性質がどのように変わるかを、導体の中の電磁波の式を示して説明せよ。導体中では、電流密度と電場は、 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ の関係にある。
- 3-4. 電気伝導度 σ が無限大の導体内 ($\sigma = \infty$) では、電磁波の電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ はゼロとなることを、問 3-3 の結果をもとに説明せよ。

(次ページに続く)

- 3-5. 無限に広い三次元 x - y - z 空間内に、電気伝導度 $\sigma = \infty$ の導体板を 2 枚、 $y = 0$ と $y = b$ に平行に置き、その間を z 方向に伝搬する電磁波を考える。ここで、 $y = 0$ と $y = b$ の間の空間は真空であり、 x 方向には一様とする。問 3-4 に示したように、 $y = 0$ と $y = b$ の境界の $\sigma = \infty$ の導体板内では、電場と磁束密度がゼロとなる。ここでは、電磁波の電場成分が y 成分のみを持ち、次のように表せるとする。

$$\mathbf{E} = E_y(x, y) \exp[i(kz - \omega t)] \mathbf{e}_y$$

- 3-5-1. この電磁波の電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ は、どのように表せるか示せ。すなわち、 E_y は具体的にどのような式になるか、また、 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ のうちどの成分がゼロでないどのような値になるかを、先に示した E_y を使い明確に示すこと。
- 3-5-2. この電磁波での ω と k の関係を求めよ。
- 3-5-3. $y = 0$ と $y = b$ の面での電場と磁束密度は Maxwell の方程式を満たしていることを使い、 $y = 0$ と $y = b$ の面での表面電荷密度と表面電流密度を実数表示で求めよ。
- 3-6. 前問 3-5 と同様に、無限に広い三次元 x - y - z 空間内に、電気伝導度 $\sigma = \infty$ の導体板を 2 枚、 $y = 0$ と $y = b$ に平行に置き、その間を z 方向に伝搬する電磁波を考える。ここで、 $y = 0$ と $y = b$ の間の空間は真空であり、 x 方向には一様とする。問 3-4 に示したように、 $y = 0$ と $y = b$ の境界の $\sigma = \infty$ の導体板内では、電場と磁束密度がゼロとなる。今度は問 3-5 と異なり、電磁波の電場成分が x 成分のみを持ち、次のように表せるとする。

$$\mathbf{E} = E_x(x, y) \exp[i(kz - \omega t)] \mathbf{e}_x$$

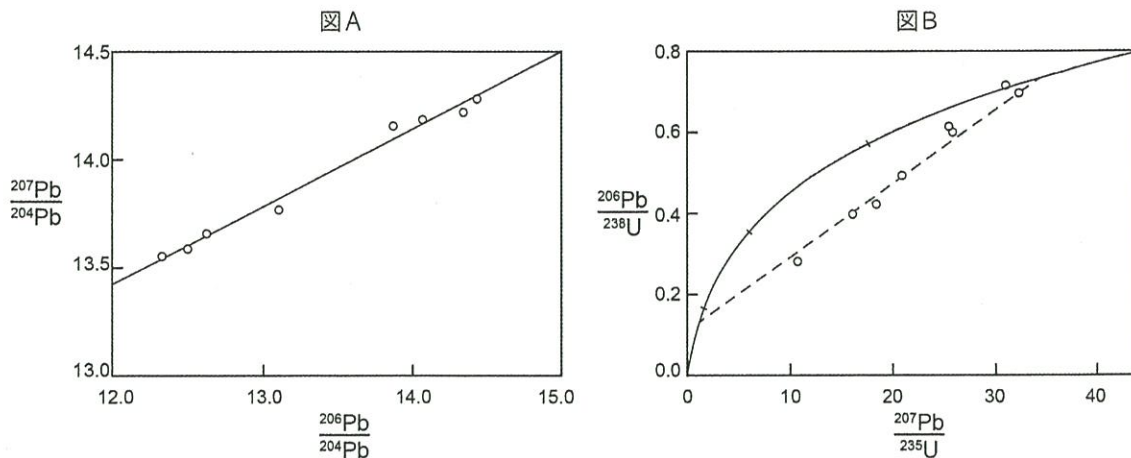
- 3-6-1. この電磁波の電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ は、どのように表せるか示せ。すなわち、 E_x は具体的にどのような式になるか、また、 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ のうちどの成分がゼロでないどのような値になるかを、先に求めた E_x を使い、明確に示すこと。
- 3-6-2. この電磁波での ω と k の関係式を求めよ。
- 3-6-3. $y = 0$ と $y = b$ の面での電場と磁場密度は Maxwell の方程式を満たしていることを使い、 $y = 0$ と $y = b$ の面での表面電荷密度と表面電流密度を実数表示で求めよ。

[4]

4-1. 放射性同位体は地質年代を推定するために利用される。岩石中のある放射性同位体の量を P とし、この岩石と外部の間で元素の出入りは無いと仮定する。このとき P と時間 t との間に次の式(1)が成立する。

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda P \quad (1)$$

ただし λ は壊変定数である。次の図について、以下の問に答えよ。



4-1-1. 図 A はある岩体に産する片麻岩の全岩 Pb 同位体組成の分析値を示したものである。等しい年代を示す岩石の分析値は、この図上でアイソクロンとよばれる直線上に分布する。この直線関係を式(1)から導き、その傾きから年代 t が求まることを示せ。ただし ^{206}Pb と ^{207}Pb はそれぞれ ^{238}U と ^{235}U の放射壊変によって生成し、その壊変定数を $^{238}\lambda$ および $^{235}\lambda$ とする。また現在の $^{238}\text{U}/^{235}\text{U}$ 比は 137.8 で一定と仮定してよい。計算の途中経過も記すこと。

4-1-2. 前問と同じ岩体の片麻岩から分離されたジルコンの U-Pb 同位体組成の分析値を図 B に示した。 ^{238}U と ^{235}U のそれぞれの壊変系列が与える年代が等しいとき、U-Pb 同位体組成は図 B 上でコンコードシアとよばれる曲線上にプロットされる(実線)。このコンコードシア曲線を数式で表わせ。その際、曲線上の位置が年代を与えることを示せ。ただし、 $t = 0$ でこの鉱物は Pb を含まないものとする。計算の途中経過も記すこと。

4-1-3. 図 B の分析値の多くはコンコードシア曲線の上になく、むしろ点線で示した直線上に分布している。この直線はディスコードシアとよばれる。図 B において、ディスコードシアとコンコードシア曲線との二つの交点が与える年代はおよそ 7.8 億年および 37.5 億年と算出された。このうち古い方の年代は、図 A のアイソクロンから求めた年代と分析の誤差範囲内で一致した。ディスコードシア上に分析点が分布するのは、いつ何が起きたためか、3 行程度で考察せよ。

4-1-4. 上記二つの年代測定法それぞれの利点を述べ、アイソクロン法を全岩に、コンコードシア法をジルコンに適用すべき理由を、あわせて 5 行程度で説明せよ。

4-2. 次の文を読み、問に答えよ。

放射壊変に関与しない安定同位体の比も、天然では物質ごとに異なる場合がある。また同一の物質であっても、生成消滅過程を通して同位体比は変化することが多い。例えば、天水(雨水)の酸素同位体比($^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$)は一般に海水よりも (A) 。この要因のひとつは海水蒸発の際に同位体分別が起きるためである。これを気体分子運動の観点から考察する。仮に水蒸気を理想気体とすると、平均速度 v で拡散する質量 m の水分子の運動エネルギーはボルツマン定数 k と、絶対温度 T を用いて以下のようにあらわせる。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \left[^{(1)} \quad \right]$$

したがって、水の分子拡散に伴う酸素同位体 ^{18}O と ^{16}O の分別係数 α は

$$\alpha = \frac{v_{18}}{v_{16}} = \left[^{(2)} \quad \right]$$

となり、蒸発した気体水分子はもとの水より H_2^{18}O が (B) ことが予想される。これを動的同位体効果とよぶ。一方、海水の蒸発や、水蒸気から雨滴への凝縮が可逆過程である場合に、同位体分別は平衡蒸気圧の違いから説明できる。2 種類の水分子の平衡蒸気圧 P_{16} と P_{18} の比は置換される同位体の質量から近似的に次式で示される。

$$\ln \left(\frac{P_{18}}{P_{16}} \right) = \frac{C}{T} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{16} \right)$$

ただし C は正の定数である。したがって気相-液相間の平衡同位体分別において水蒸気から雨滴に凝縮しやすいのは H_2^{16}O と H_2^{18}O のうち (C) である。

4-2-1. 文中の空欄 (A)、(B) および (C) に当てはまる語句を答えよ。

4-2-2. 文中の空欄 (1) に当てはまる式、および空欄 (2) に当てはまる数字を答えよ。ただし水素の原子量は 1 とし、 ^{16}O および ^{18}O の同位体質量はそれぞれ 16 および 18 とする。

4-2-3. 地球を平均的にみると天水の酸素同位体組成は緯度によってどのような違いがあるかを述べ、その違いが生じる理由を全球の水循環を踏まえて説明せよ。(あわせて 5 行以内)

4-2-4. 過去 3 万年の間に海底に堆積した浮遊性有孔虫を世界各地の海底コアから取り出した。その同位体比を分析したところ、どの場所でもおよそ 2 万年前から 1 万年前の期間で、有孔虫炭酸塩殻の $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ 比が単調に減少する傾向が見られた。まず、海洋から沈殿する炭酸塩の酸素同位体比は一般的にどのような要因によって変化するか、簡潔に二つ答えよ。そのうえで、この観測された $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ 比の減少が何を意味するか、前問までの結果をふまえて考察せよ。ただし、有孔虫炭酸塩殻の同位体比は堆積後の過程では変化しないこととする。(あわせて 5 行以内)

専門科目（午後）

25 大修

地球惑星科学

時間 13:30 ～ 16:00

注意事項

- 1.以下の4問（5～8）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
- 2.解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
- 3.各解答用紙に必ず問題番号（5～8）及び受験番号を記入せよ。

[5]

実数 x を変数とし, $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で定義された連続な実関数 $\phi(x), \psi(x)$ に対し, 関数の内積を次のように定義する。

$$\langle \phi, \psi \rangle \equiv \int_{-1}^1 \phi(x)\psi(x) dx \quad (1)$$

以下の各問に答えよ。

5-1. 関数系 $\{1, x, x^2, x^3, \dots\} = \{x^n\} (n = 0, 1, 2, \dots)$ を元に, 次の手順で正規直交関数系 $\{\varphi_n(x)\} (n = 0, 1, 2, \dots)$ を作る。

- ・ 補助的に, 関数 $\bar{\varphi}_n(x) (n = 0, 1, 2, \dots)$ を用いる。
- ・ $\bar{\varphi}_0(x) = 1$ とする。
- ・ $\bar{\varphi}_i(x) (i = 1, 2, \dots)$ を, 次により定める。

$$\bar{\varphi}_i(x) = x^i - \sum_{k=0}^{i-1} \langle \varphi_k, x^i \rangle \varphi_k$$

- ・ $\varphi_i(x) (i = 0, 1, 2, \dots)$ を, 次により定める。

$$\varphi_i(x) = \frac{\bar{\varphi}_i(x)}{\sqrt{\langle \bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_i \rangle}} \quad (2)$$

5-1-1. $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ を具体的に書き下せ。

5-1-2. $-1 \leq x \leq 1$ で定義された関数 x^2 を, $\varphi_i(x) (i = 0, 1, 2)$ で次のように展開する。

$$x^2 = \sum_{i=0}^2 c_i \varphi_i(x)$$

c_0, c_1, c_2 を求めよ。

(次ページに続く)

5-2. x を実数, n を非負の整数とし, u を $u(x) = (x^2 - 1)^n$ とする。

5-2-1. 次式が成り立つことを示せ。ただし, u' は u の x による微分を表す。

$$(x^2 - 1)u' = 2nxu \quad (3)$$

5-2-2. x による u の n 階微分を $q_n(x) = u^{(n)}(x)$ とする。 $q_n(x)$ は, 次の微分方程式を満たすことを示せ。

$$(1 - x^2) \frac{d^2 q_n}{dx^2} - 2x \frac{dq_n}{dx} + n(n+1)q_n = 0 \quad (4)$$

5-2-3. ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ は, 次式で与えられる n 次多項式である。

$$P_n(x) \equiv \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} q_n(x) \quad (5)$$

$P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ を, 具体的に x の関数として書き下せ。

5-2-4. x^2 を, ルジャンドル多項式を用いて次のように展開する。

$$x^2 = \sum_{i=0}^2 c_i P_i(x) \quad (6)$$

展開係数 c_0, c_1, c_2 を求めよ。

5-2-5. n 次のルジャンドル多項式 $P_n(x)$ は, 次の微分方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n+1)P_n = 0 \quad (7)$$

5-2-6. m, n を, 非負の整数とする。次の積分の値を求めよ。

$$\int_{-1}^1 \left\{ P_m(x) \cdot \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] - P_n(x) \cdot \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_m(x)}{dx} \right] \right\} dx \quad (8)$$

5-2-7. $m \neq n$ のとき, 次の関係が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (9)$$

(次ページに続く)

5-3. n を自然数とする。 n 次方程式 $P_n(x) = 0$ ($P_n(x)$ は n 次のルジャンドル多項式) は、 $-1 < x < 1$ の範囲に n 個の相異なる根を持つ。これらの根を x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) と書くことにする。

関数 $f(x)$ を、 $-1 \leq x \leq 1$ で定義された $(2n-1)$ 次の多項式とすると、 $f(x)$ の積分は次のような和で表現することができる。これを、ガウスの数値積分公式という。

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n \frac{(1-x_i)^2}{\{P_{n+1}(x_i)\}^2} f(x_i) \quad (10)$$

ガウスの数値積分公式が成り立つことを、次の順で確かめよう。

5-3-1. 関数 $g(x)$ が

$$g(x) = \frac{P_n(x)}{(x-x_i)P'_n(x_i)}$$

で与えられるとき、次の値を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow x_i} g(x)$$

5-3-2. 関数 $f(x)$ は、 $-1 \leq x \leq 1$ で定義された $(2n-1)$ 次の多項式とする。 $x = x_i$ において $f(x_i)$ の値に一致する $(n-1)$ 次の多項式を $v_{n-1}(x)$ とすると、

$$v_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{P_n(x)}{(x-x_i)P'_n(x_i)} \quad (11)$$

と書くことができる。次の関係が成り立つことを示せ。

$$v_{n-1}(x) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n \frac{(1-x_i^2)f(x_i)}{\{P_{n+1}(x_i)\}^2} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)P_k(x)P_k(x_i) \quad (12)$$

なお、ルジャンドル多項式においては次の関係が成り立つことを使ってもよい。

$$(x^2-1)P'_n(x) = (n+1)\{P_{n+1}(x) - xP_n(x)\} \quad (13)$$

$$(x-y) \sum_{k=0}^n (2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)\{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)\} \quad (14)$$

5-3-3. $(2n-1)$ 次の多項式 $f(x)$ は、適当な $(n-1)$ 次の多項式 $w_{n-1}(x)$ と $v_{n-1}(x)$ を用いて

$$f(x) = P_n(x)w_{n-1}(x) + v_{n-1}(x)$$

と書くことができる。これを用いて、ガウスの数値積分公式 (10) が成り立つことを示せ。

[6]

二体系において、一方の物体からみて他方の物体が無限の遠方から飛来し、互いに力を及ぼし合って軌道を曲げながら再び無限の遠方に飛び去っていく運動を散乱と呼ぶ。ここでは、万有引力を及ぼし合う二天体の散乱を考える。天体 1 の質量を m 、天体 2 の質量を M とし、天体の大きさは無視できるものとする。また、万有引力定数を G とし、相対論的效果は無視できるものとする。

- 6-1. 二天体の運動が、共通重心の運動と二天体の相対運動とに分離できることを示せ。
- 6-2. ここでは、天体 2 に対する天体 1 の相対運動を考える。図 1 のように、天体 2 を原点、無限遠での天体 1 の入射方向を x 軸、二天体と x 軸を含む平面上で x 軸に垂直な方向を y 軸にとる。また、天体 1 の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ ($|\mathbf{r}| = r$)、 x 軸と $\mathbf{r}$ のなす角を θ とする。このとき、以下の手順で天体 1 の描く軌跡を求めよう。
- 6-2-1. xy 平面内のあるベクトル $\mathbf{A}$ を考える。ベクトル $\mathbf{A}$ の r 方向成分 A_r 、 θ 方向成分 A_θ を、 $\mathbf{A}$ の x 方向成分 A_x 、 y 方向成分 A_y を用いてそれぞれ表せ。
- 6-2-2. 天体 1 の速度の r 方向成分と θ 方向成分を、座標 r, θ によりそれぞれ表せ。
- 6-2-3. 天体 1 の運動方程式を r 方向、 θ 方向についてそれぞれ書き表せ。また、 θ 方向の運動方程式から以下の式が成り立つことを示せ。

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (h \text{ は定数}) \quad (1)$$

ここで、 $\dot{\theta}$ は θ の時間微分を表す。

- 6-2-4. 前問 6-2-3 で導いた式に対し $q = \frac{1}{r}$ 、 $\dot{\theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dt}$ と変数変換すると以下のように書けることを示せ。

$$\frac{d^2 q}{d\theta^2} + q = \frac{G(m+M)}{h^2} \quad (2)$$

また、(2) 式は以下の解をもつことを示せ。

$$q = K \cos(\theta - \theta_0) + \frac{G(m+M)}{h^2} \quad (K, \theta_0 \text{ は定数}) \quad (3)$$

- 6-2-5. 無限遠における天体 1 の速さを v_0 、 x 軸からの距離（衝突パラメータ）を b とするとき（図 1 参照）、 h および K を、 v_0 、 b を用いて表せ。ただし、 K は正とする。

- 6-2-6. 天体 1 の入射方向と出射方向のなす角 Θ を散乱角と呼ぶ。

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{G(m+M)}{v_0^2 b} \quad (4)$$

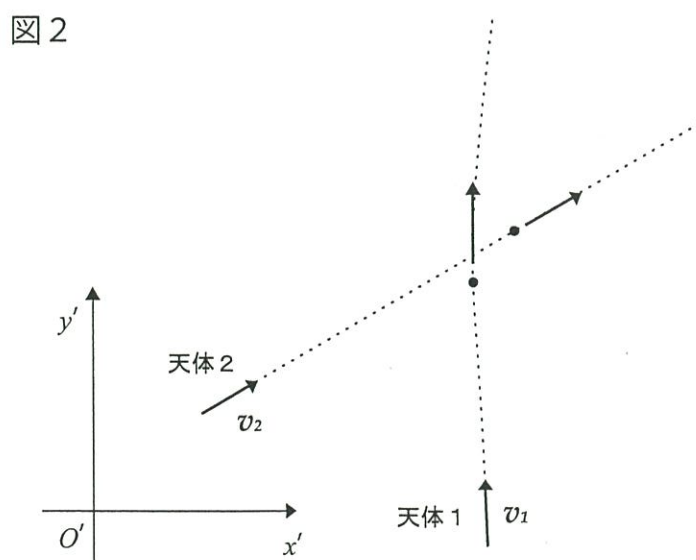
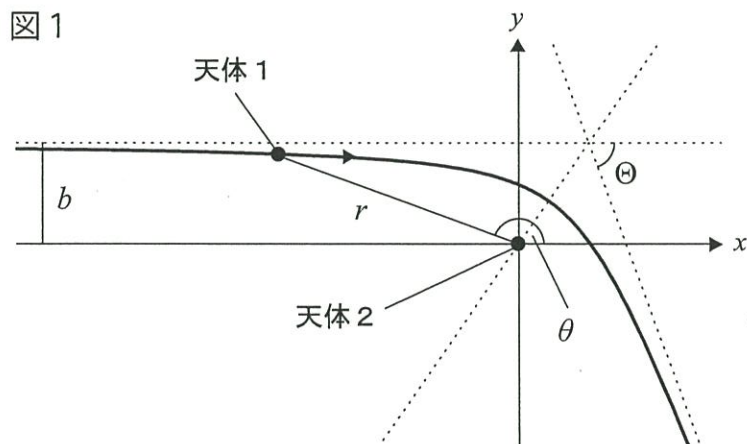
と書けることを示せ。

(次ページに続く)

6-3. ここでは、原点を O' とするある慣性系でみた二天体の散乱を考える。図 2 のように、二天体は点 O' を含む $x'y'$ 平面内を運動する。天体 2 は点 O' に対して等速度 v_2 で運動し、そこに無限遠での速度 v_1 をもった天体 1 が入射する。 v_1 と v_2 のなす角を ϕ とする。天体 1 は天体 2 の進行方向後方を通過して散乱されるものとし、天体 2 に対する天体 1 の入射方向と出射方向のなす角を散乱角 Θ とする。天体 2 の質量は天体 1 の質量に比べて十分大きく、散乱による天体 2 の運動の変化は無視できるものとする。

6-3-1. 散乱後の無限遠における天体 1 の速さ V_1 を $v_1(=|v_1|)$, $v_2(=|v_2|)$, ϕ , Θ を用いて表せ。

6-3-2. $v_1 = v_2$, $\phi = 60^\circ$ のとき, V_1 がとりうる最大値を求めよ。また, そのときの散乱角および衝突パラメータを求めよ。



[7] 次の文章を読んで以下の問いに答えよ．なお，気体定数を R とする．

体積 V の容器の中で，気体が絶えず乱雑な運動をしている状態を考える．純粋な気体の物理的状态は体積 V ，物質質量（モル数） n ，圧力 p ，および温度 T という 4 つの変数で指定される．これら 4 変数のうち 3 つを指定すると残りの 1 変数は一意に決まることが分かっている．このとき 4 変数の間に成り立つ関係式のことを，気体の状態方程式とよぶ．

(A)いくつかの経験法則や原理の組み合わせから，理想気体の状態方程式は次のように表すことができる．

$$\boxed{\hspace{10em}} \qquad \text{式(1)}$$

一方，我々の周囲にある実在気体は厳密には式(1)に従わない．これは気体分子の体積がゼロではないこと，および分子間には(B)反発力や引力といった相互作用があるためである．ここで，実在気体の状態方程式を考える．まず分子の体積がゼロでないので，分子が実際に運動できる空間は V より小さい．そこで，式(1)を以下のように置き換えることができる．

$$\boxed{\hspace{10em}} \qquad \text{式(2)}$$

次に分子間相互作用を考える．気体の圧力は，分子が容器の壁に衝突する頻度と，1 回の衝突の力に依存する．衝突頻度とその力は，分子間に引力があると減少する．圧力の減少分を式(2)から差し引くと，

$$\boxed{\hspace{10em}} \qquad \text{式(3)}$$

が得られる．この式をファンデルワールスの状態方程式とよび，定数 a と b は気体ごとに固有の値を持つ（ファンデルワールス係数）．式(3)で記述される実在気体のことをファンデルワールス気体とよぶ．

7-1. 下線部(A)の経験法則や原理とはどのようなものか，5 行以内で説明せよ．

7-2. 式(1)を書け．

7-3. 分子の占める全体積は物質質量の b 倍であるとして，式(2)を $p =$ の形で書き表せ．

7-4. 式(3)を $p =$ の形で書き表せ．ただし，実在気体の圧力はモル濃度の 2 乗に比例して減少し，その比例定数は a であるとする．

7-5. 下線部(B)にある，分子間に働く反発力や引力とはどのようなものか，説明せよ．また，反発力が実在気体にとって重要になるのは，気体がどのような状態にあるときか，簡潔に述べよ（あわせて 5 行程度）．

7-6. あるファンデルワールス気体の 500 K，100 atm におけるモル体積は，理想気体と仮定したときの何倍になるか，求めよ．ただし，この気体のファンデルワールス係数は $a = 6$ ($\text{L}^2 \cdot \text{atm} \cdot \text{mol}^{-2}$)， $b = 0.06$ ($\text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$)であり，気体定数は $R = 0.08$ ($\text{L} \cdot \text{atm} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)とする．

7-7. 温度を一定に保ったとき、気体の体積変化に応じて内部エネルギー (U) がどのように変化するかを考える。

7-7-1. 等温において、 V に対する U の変化を π_T とすると、次のように記述できる。

$$\pi_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \quad \text{式(4)}$$

このとき、 $\pi_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$ が成り立つことを示せ。

7-7-2. 上式と式(3)から p を消去し、ファンデルワールス気体の π_T を表す式を求めよ。

7-7-3. 前問より、ファンデルワールス気体の π_T は常に正であることが分かる。しかし、実在気体の中には $\pi_T < 0$ の状態も存在する。それは気体がどのような物理状態にあるときか。また、そのことからファンデルワールスの状態方程式の有効性に関して、どのようなことが言えるか。

7-8. CO_2 が気体のときファンデルワールス気体とみなせるとする。ある容器に入れた 1 mol の CO_2 を一定温度に保つとき、式(3)から求めた CO_2 の体積と圧力の関係は図 1 のようになる。図のように、 $T = T_1$ のときは 2 つの極値と 1 つの変曲点を持つ曲線、 $T = T_2$ のときは極値も変曲点もない曲線が得られた。また、 $T = T_c$ のときは極値を持たず変曲点が 1 つの曲線が得られた。

7-8-1. T_1, T_2, T_c の大小関係を答えよ。

7-8-2. $T = T_1$ のときの p と V の関係、および CO_2 の物理的状态について述べよ。図を用いても良い。

7-8-3. $T = T_2$ のときの p と V の関係、および CO_2 の物理的状态について述べよ。図を用いても良い。

7-8-4. $T = T_c$ における体積 V_c 、圧力 p_c の点はこのグラフの停留点になっている。 CO_2 の $a = 3.6 \text{ (L}^2 \cdot \text{atm} \cdot \text{mol}^{-2})$ 、 $b = 0.042 \text{ (L} \cdot \text{mol}^{-1})$ としたとき、 T_c を求めよ。ただしここでは $R = 0.082 \text{ (L} \cdot \text{atm} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$ として、有効数字 2 桁で求めよ。

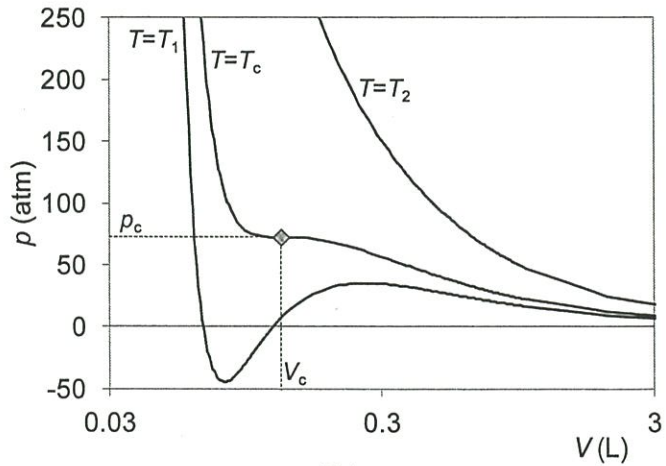


図1

[8]

地球のマントル対流の性質と、その結果として生じる地球科学的現象に関する以下の問いに答えよ。

8-1. マントル対流を駆動するエネルギー源は何か。またそれらはどのような機構で対流運動（流れ）を引き起こすか。次にあげる用語をすべて用いて4行程度で答えよ。重力ポテンシャル、放射壊変、熱膨張・収縮、密度。

8-2. 熱対流としてのマントル対流は、レイリー数（ Ra ）と呼ばれる無次元数によってその強度を表すことができる。レイリー数は、ある部分が熱的に周囲となじむ熱拡散の時間スケール（浮力または沈降力を保持できる時間） $\tau_1 = \frac{D^2}{\kappa}$ と、その浮力をもった部分が上昇に要する時間スケール $\tau_2 = \frac{\mu}{g\rho\alpha\Delta T D}$ との比として表される。 Ra を $g, \rho, \alpha, \Delta T, D, \kappa, \mu$ （それぞれ重力加速度、密度、熱膨張係数、系を代表する温度差、流体層の重力方向の厚さ、熱拡散率、粘性率を表す）を用いて表しなさい。また、 τ_1 と τ_2 のどちらが大きいときに熱対流が起こりやすいかを論じながら、熱対流が起こる条件を Ra を用いて表しなさい。

8-3. 地球のマントル対流に対応する値として、 $g=9.8 \text{ m s}^{-2}$, $\rho=4.5\times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\alpha=3.0\times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\Delta T=2000 \text{ K}$, $D=3.0\times 10^6 \text{ m}$, $\kappa=1.0\times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\mu=1.0\times 10^{21} \text{ Pa s}$ としたとき、マントル対流の Ra をもとめ、熱対流が起こりうるかどうかを判定しなさい。

8-4. ある物質（水に近い）が次のような物性をもつとき、どのような大きさ（ D ）および温度差（ ΔT ）を与える実験装置を設計すれば地球のマントル対流（ Ra の観点から）再現することができるか。 D および ΔT を求めなさい。物性値は、 $\rho=10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\alpha=10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $\kappa=10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\mu=10^{-4} \text{ Pa s}$ とする。

8-5. マントルが地球内部の相転移境界を横切って流動するとき、相転移の性質に応じて流れが変化することがある。熱対流が阻害される可能性があるのは、地球内部で起こるどのような相転移か。相転移に関わる鉱物とその化学組成、相転移の深さ、相境界線のクラウジウス-クラペイロン勾配の符号を述べなさい。またこの相転移が熱対流を阻害する機構を5行程度で説明しなさい。図（例えば、相境界を含む圧力-温度図）を用いながら説明しても良い。

8-6. 次の用語を、おのこの3行程度で説明しなさい：リソスフェア、アセノスフェア、低速度層、熱境界層。また、これら4つの用語すべてを用いて、プレートおよびプレートテクトニクスとマントル対流との関係を5行程度で説明しなさい。