

専門科目（午前）

26 大修

地球惑星科学

時間 9:30 ～ 12:00

注意事項

- 1.以下の4問(1～4)中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
- 2.解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
- 3.各解答用紙に必ず問題番号(1～4)及び受験番号を記入せよ。

[1]

- 1-1. 三角関数の関数列 $\{1, \cos mx, \sin mx\}$ ($m = 1, 2, \dots$) は区間 $[-\pi, \pi]$ における直交関数系をつくる。同区間にて定義された積分可能な実関数 $f(x)$ に対する、この直交系による展開級数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

を $f(x)$ の Fourier 級数、 a_m 、 b_m を $f(x)$ の Fourier 係数という。

- 1-1-1. a_0 、 a_m 、 b_m を $f(x)$ の積分の形で表せ。

- 1-1-2. 周期 2π の周期関数である、次の関数の Fourier 級数を求めよ。

(1) $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)

(2) $f(x) = |\sin x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)

- 1-1-3. $f(x)$ を、 N 次の三角関数の多項式

$$P_N(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{m=1}^N (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$$

で近似するとする。近似の良さを評価するために以下の平均自乗誤差 Q_N を導入するとき、 Q_N を最小にする α_m 、 β_m が Fourier 係数に一致することを示せ。

$$Q_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_N(x)|^2 dx$$

- 1-2. 次の $N(\geq 2)$ 次正方行列を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

A の行列式 $\det A$ について、以下の式が成り立つことを示せ。

$$\det A = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

[2]

2-1. ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \quad (V_0 > 0)$$

のところにエネルギー E の粒子 (質量 m) が入射する場合を考える。粒子に伴う波動を考え、一次元の波動関数を $\psi(x)$ とすると、時間を含まない Schrödinger 方程式は以下のように表される。ここで、 $\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数) である。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

2-1-1. 粒子が x 軸の負の側から入射したとする。

2-1-1-1. $-V_0 < E < 0$ の場合の波動関数を $x < 0$ 、 $x > 0$ についてそれぞれ求めよ。

2-1-1-2. $E > 0$ の場合の波動関数を $x < 0$ 、 $x > 0$ についてそれぞれ求めよ。

2-1-1-3. 入射波と反射波の振幅の絶対値の 2 乗の比を反射率とするとき、2-1-1-1、2-1-1-2 それぞれの場合について反射率を求めよ。

2-1-2. エネルギー $E(> 0)$ の粒子が x 軸の正の側から入射した場合の反射率を求めよ。

2-2. 磁気モーメント m をもつ磁性原子を含む固体物質が、絶対温度 T 、外部磁場 H のもとにある。磁性原子の熱振動により磁気モーメントの方向は変化する一方で、磁気モーメントは外部磁場と平行になろうとし、結果としてこの物質は磁化をもつ。磁性原子間の磁氣的相互作用はないとして、以下の問いに答えよ。

2-2-1. 磁性原子の磁気ポテンシャルエネルギーの分布が、ボルツマン分布に従うとする。このとき、 m と H の成す角を θ とすると、磁気モーメントが θ と $\theta + d\theta$ との間に向く確率 $f(\theta)d\theta$ は次式で表されることを導け。ここで、 k はボルツマン定数である。

$$f(\theta)d\theta = \frac{\exp\left(\frac{mH \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{mH \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta}$$

2-2-2. 設問 2-2-1 の磁性原子が単位体積の物質中に N 個存在するとき、この物質の単位体積あたりの磁化の大きさ M は、次式で表されることを導け。

$$M = Nm \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$$

ここで、 $\alpha = mH/kT$ 、 $\coth x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x) - \exp(-x)}$ である。

2-2-3. 磁性原子の磁気ポテンシャルエネルギーが熱振動によるエネルギーに比べて微小な場合、磁化 M は外部磁場の強さ H に比例することを示せ。

[3]

3-1. 次の文章を読んで以下の問いに答えよ。

電磁波は波長に応じて異なる名称で呼ばれ、例えば人間の目で見える可視光の波長はおよそ (a) の範囲にある。また紫外線は (b)、X 線は (c) という範囲の波長を持つ。高温の物体が電磁波を放射する現象を熱放射と呼ぶ。特に⁽¹⁾黒体からの熱放射（黒体放射）は⁽²⁾波長に対するエネルギー分布が黒体の温度のみに依存する。物理学者のレイリーとジーンズは、古典物理学を用いて黒体放射のエネルギー分布を説明しようとした。しかし、彼らが導いたレイリー・ジーンズの式は波長が短くなる紫外線の領域において観測と矛盾し、古典物理学には限界があることが明らかとなった。一方ドイツの物理学者プランクは、振動数 ν の電磁波が持つエネルギー ϵ について、プランク定数 h を用いて (ア) と考えることにより、その分布を矛盾なく説明することに成功した。

ここで、金属表面に光を当てると電子（光電子）が放出される「光電効果」を考えよう。光電効果の実験的特徴として、①照射電磁波の振動数がその金属特有の⁽³⁾しきい値を超えないと光電子は放出されない、②電磁波の強度が小さくても振動数がしきい値以上であれば光電子は放出される、③光電子のエネルギーは照射電磁波の振動数により変化する、などがあげられる。これらの現象は古典物理学では説明が難しく、⁽⁴⁾量子論に基づいて考えることで初めて説明可能となる。光電効果の事実から、光が波の性質のみならず、粒子の性質を持つことが結論づけられる。

3-1-1. 空欄(a)-(c)に入れるものとして最も適切なものをそれぞれ以下から選択せよ。

1 pm ~ 10 nm, 10 nm ~ 400 nm, 400 nm ~ 700 nm, 700 nm ~ 1 mm, 1 mm ~ 10 mm
--

3-1-2. 下線部(1)の黒体とはどのようなものか、簡潔に説明せよ。

3-1-3. 下線部(2)について、黒体放射のエネルギー分布は温度に応じてどのように変化するか、簡潔に説明せよ。図や式を用いても良い。

3-1-4. 空欄（ア）を適切な式で埋め、文章を完成させよ。

3-1-5. 太陽の可視光およびその周辺波長のエネルギー分布を詳細に観測すると、太陽に存在する元素の種類と量を推察することができるが、その原理はどのようなものか。5行程度で述べよ。

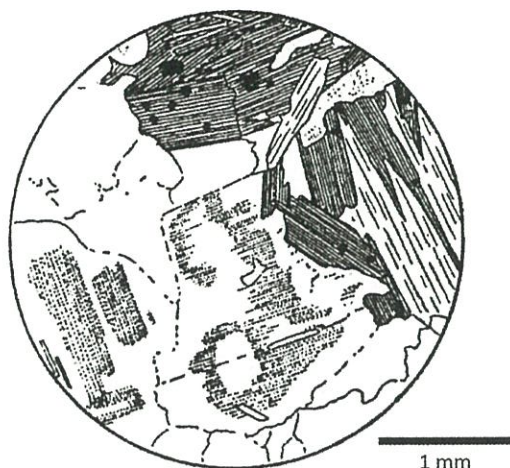
3-1-6. 下線部(3)のしきい値を何とよぶか。また、周期表 1 族である Na、K、Rb について、しきい値の大小関係を述べよ。

3-1-7. 下線部(4)について、光電効果の実験結果①～③を量子論の立場から 5 行程度で説明せよ。図や式を用いてもよい。

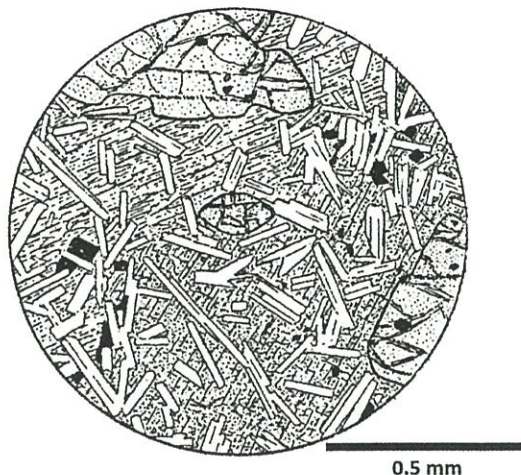
[4] 以下の設問に答えなさい。解答はすべて解答用紙に記入すること。

下の図は岩石薄片の顕微鏡スケッチである。(透過光、オープンニコル)

スケッチ1 珧長質岩石



スケッチ2 苦鉄質岩石



図は A.Harker 著 “Petrology for Students” より

4-1. スケッチ1は珧長質岩石である。スケッチをもとに以下の設問に答えよ。

4-1-1. スケッチ1の岩石名を答えなさい。またこの岩石がどのような場所で生成したかを推定し答えなさい。またそのように推定した根拠を3行以内で説明しなさい。

岩石名： _____ 生成場所： _____

推定の根拠： _____

4-1-2. スケッチ1に示される岩石に通常含まれる主要構成鉱物4種類を答えなさい。

(1) _____ (2) _____ (3) _____ (4) _____

4-1-3. 4-1-2で答えた鉱物に含まれる主要な元素を、4つの鉱物それぞれについて書きなさい。

(1) _____ (2) _____

(3) _____ (4) _____

4-1-4. ジルコンは、その量は少ないが、ほぼ常に珧長質岩に含まれる。スケッチ1でジルコンは主としてどこに存在するか？ジルコンを顕微鏡で識別する特徴とともに5行以内で説明しなさい。

4-1-5. ジルコンを用いて岩石の形成年代を推定する手法と用いる分析装置を5行以内で説明しなさい。

4-2. スケッチ 2 は苦鉄質岩石である。スケッチをもとに以下の設問に答えよ。

4-2-1. スケッチ 2 の岩石名を答えなさい。またこの岩石がどのような場所で生成したかを推定し答えなさい。またそのように推定した根拠を 3 行以内で説明しなさい。

岩石名： _____ 生成場所： _____
推定の根拠： _____

4-2-2. スケッチ 2 で示される岩石に通常含まれる主要鉱物 4 種類を答えなさい。

(1) _____ (2) _____ (3) _____ (4) _____

4-2-3. 4-2-2 で答えた 4 つの鉱物の組成式を主要な固溶体成分を含めて書きなさい。

(1) _____ (2) _____
(3) _____ (4) _____

4-3. カンラン石は偏光顕微鏡で観察すると干渉色が鮮やかである。複屈折率がほかのマントル構成鉱物に比較して高いことは、カンラン石のどのような性質によるか。結晶構造を比較しながら 5 行以内で説明せよ。図を用いてよい。

4-4. 地震波速度の異方性は上部マントルのどのような場所で観察されるか。またそれはどのような理由で生じるか。5 行以内で説明せよ。(ヒント：4-3 で説明した内容を利用せよ)

4-5. カンラン石を含む岩石がプレート運動に伴って地球深部に沈み込むとする。この時、カンラン石は地球の深さ 1000 km までの、どの深さで、どのような相転移を起こすか。適切な図を用いて 5 行以内で説明せよ。

専門科目（午後）

26 大修

地球惑星科学

時間 13:30 ～ 16:00

注意事項

- 1.以下の4問（5～8）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
- 2.解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
- 3.各解答用紙に必ず問題番号（5～8）及び受験番号を記入せよ。

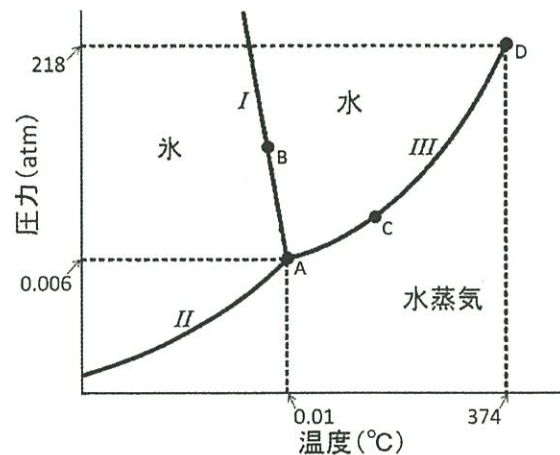
[5] いくつかの成分からなる系の相平衡について、以下の問に答えなさい。

5-1. 「成分」および「相」とは何か。それぞれ2行程度で説明しなさい。

5-2. 炭素 (C) からなる系では、複数の固体相 (固体状態の相) の存在が知られている。2つの相の名前を挙げ、それらの原子配列と結合の違いを3行程度で述べなさい。

5-3. ある温度 (T) と 圧力 (P) を与えた時に存在する相の数を n とする。この時の系の自由度 f を、 n および系を構成する成分の数 m を用いて表しなさい。また、同時に存在する相の最大の数 m を用いて表しなさい。

5-4. 右図は、 H_2O からなる一成分系の相平衡図である (見やすくするため、横軸・縦軸ともリニアスケールではない)。線 I 、 II 、 III は相境界を表す。この図を参照し、以下の問に答えなさい。



5-4-1. 点 A、B、C、D の名称を答えなさい。また、A、B、C 各点における自由度 f をそれぞれ求めなさい。

5-4-2. 相境界線 (I 、 II 、 III) 上では、共存する相の1モルあたりのギブス自由エネルギーの差 (ΔG) は0である。境界線上でわずかに温度と圧力を変化 (それぞれ dT 、 dP と表す) させた時の ΔG の変化 ($d\Delta G$) を、共存相の1モルあたりのエントロピーの差 (ΔS) および体積の差 (ΔV) を用いて表しなさい。また、その関係式から dP/dT を ΔS と ΔV を用いて表しなさい。

5-4-3. 相境界線 I が負の dP/dT 勾配をもつ理由を、氷の結晶構造に言及しながら2行程度で述べなさい。

5-4-4. 相境界線 I が直線的であるのに対し、 III が下に凸の曲線的な境界である主な理由を3行程度で述べなさい (横軸・縦軸がリニアスケールでも、同じ特徴が見られることに留意すること)。

5-5. 二成分系の相平衡について、以下の問に答えなさい。

5-5-1. 2つの成分*i*と*j*からなる液体相 α を考える。 α 相中の成分*i*、*j*は理想混合すると仮定すると、ある温度(T)、圧力(P)における各成分の化学ポテンシャル μ_α^i および μ_α^j は、それぞれ $\mu_\alpha^{0i} + RT \ln C_\alpha^i$ および $\mu_\alpha^{0j} + RT \ln C_\alpha^j$ と表される。ここで、 μ_α^{0i} と μ_α^{0j} は、温度(T)、圧力(P)における純粋相(成分*i*または*j*のみからなる α 相)の化学ポテンシャル、 C_α^i と C_α^j は α 相中の成分*i*、*j*の相対モル濃度($0 \leq C_\alpha^i$ 、 $C_\alpha^j \leq 1$ 、 $C_\alpha^i = 1 - C_\alpha^j$)を表す。 R は気体定数である。この時、横軸に C_α^j 、縦軸に $\mu_\alpha (= C_\alpha^i \mu_\alpha^i + C_\alpha^j \mu_\alpha^j)$ をとり、 μ_α を C_α^j の関数として模式的に図示しなさい。また、 μ_α が $C_\alpha^i \mu_\alpha^{0i} + C_\alpha^j \mu_\alpha^{0j}$ から最もずれる C_α^j を求めなさい。

5-5-2. いずれも成分*i*と*j*からなる液体相 α と固体相 β とが平衡共存する場合、5-5-1と同様の表記を β 相にも用いながら以下の問に答えなさい。 α 相、 β 相中の成分*i*、*j*は理想混合すると仮定する。

5-5-2-1. 平衡共存の条件を式で表しなさい。

5-5-2-2. 成分*j*の分配係数 $K^j (= C_\beta^j / C_\alpha^j)$ を、 $\Delta \mu_{\alpha-\beta}^{0j} (= \mu_\alpha^{0j} - \mu_\beta^{0j})$ を用いて表しなさい。また、 P および $\Delta \mu_{\alpha-\beta}^{0j}$ がそれぞれ一定の時、温度上昇に伴って分配係数はどのように変化するか、簡潔に述べなさい。

5-5-2-3. 成分*i*と*j*のうち、一方のモル濃度が低い場合、液体相 α を希薄溶液と呼ぶ。ここでは、高濃度成分を*i*(溶媒)、低濃度成分を*j*(溶質)とする。このとき、 $\ln C_\alpha^i = \ln(1 - C_\alpha^j) \approx -C_\alpha^j$ が成り立つ(この近似式は固体相 β でも成り立つ)。成分*i*と*j*からなる物質の凝固点を T_0 、成分*i*だけからなる物質の凝固点を T_i 、 α 相と β 相の1モルあたりのエントロピーはそれぞれ S_α^i 、 S_β^i で一定としたとき、溶質*j*による凝固点温度の変化量 $\Delta T (= T_0 - T_i)$ を求めなさい。

[6] プレートテクトニクスと地球表層の物質に関する次の問に答えよ。

6-1. 受動的大陸縁の断面を図示せよ。それを用いて海洋プレートと大陸プレートの層状構造にはどのような違いがあるかを説明せよ（3行程度）。ただし、図にはアセノスフェアとリソスフェアの境界を明示すること。

6-2. 海洋プレートの層構造が出来る過程を、4行程度で説明せよ。ただし、次の4つの語句を全て用いること。

玄武岩、ハンレイ岩、ハルツバージャイト、減圧融解

6-3. 表1は4つの火成岩 A、B、C および D の化学組成を示したものである。

表1

	A	B	C	D
SiO ₂	45.40	72.30	50.68	42.39
TiO ₂	3.00	0.26	1.49	0.01
Al ₂ O ₃	14.70	14.20	15.60	3.12
Fe ₂ O ₃	4.10	0.39	1.40	1.97
FeO	9.20	1.63	9.85	5.73
MgO	7.80	0.74	7.69	39.82
CaO	10.50	2.18	11.44	2.96
Na ₂ O	3.00	3.39	2.66	0.02
K ₂ O	1.00	3.97	0.17	0.00

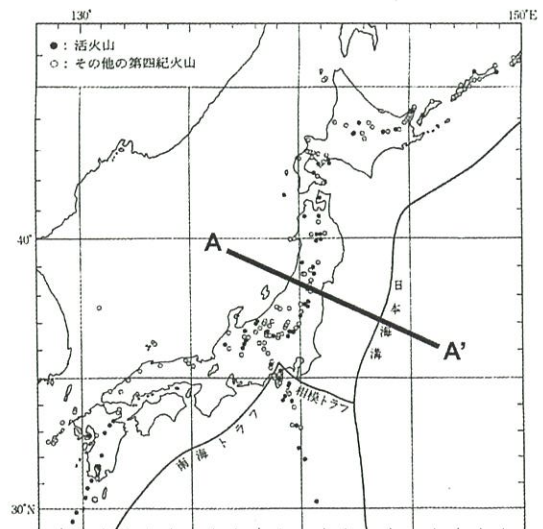
* 単位は重量%である

6-3-1. 表1の4つの岩石のうち一つは、中央海嶺において生成する主要な火山岩を採取したものである。その岩石はAからDのうちどれか答えよ。

6-3-2. 表1の4つの岩石のうち一つは、沈み込み帯の火成活動によって形成した花崗岩である。その岩石はAからDのうちどれか答えよ。

6-3-3. 表1の4つの岩石を比較すると、Dはその他3つの岩石より Mg/Si 比が高い。この違いが生じる理由を5行程度で説明せよ。ただし「中央海嶺」、「沈み込み帯」という二つの語を必ず用いること。

6-4. 右の図は日本列島の活火山の分布を表した地図である。東北日本の活火山は海溝から水平距離にして300 km 北西に離れて帯状に配列している。島弧火山がこのような分布になる理由を5行程度で説明せよ。ただし、図中 A-A'に代表されるような島弧断面の温度構造を表した図を示すこと。



- 6-5. 中央海嶺近傍では熱水循環によって海水と海洋地殻との反応が生じる。
- 6-5-1. この熱水循環の結果、最終的に海水から地殻へ移動する元素の例を一つ答えよ。またその元素移動は具体的にどのような反応によるものかを説明せよ。全部で3行程度。
- 6-5-2. 海嶺の中軸谷で海底へ噴出する熱水の温度と水深の間にはどのような関係があるか答えよ。またそのような関係が生じる理由を説明せよ。全部で3行程度。
- 6-6. 海洋底玄武岩の $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 初生比はほぼ 0.702~0.706 の間に入る。一方、花崗岩の $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 初生比はその年代や造構場によって様々な値をとるが、0.71 を超えるものが多い。この違いがなぜ生じるのか、5行程度で説明せよ。ただし「放射壊変」と「部分融解」という語を必ず用いること。また必要なら図を用いてもよい。
- 6-7. 海洋におけるストロンチウム (Sr: 原子量 87.6) の主要な供給源は、大陸の風化過程を通して河川から流入するものである。現在の海洋における Sr 濃度は 8 mg/kg である。この濃度は定常状態にあり、河川流入に対する平均滞留時間は 3600 万年であるとする。過去の地球におけるある時期には海洋の Sr 濃度が 4 mg/kg であったとする。このとき海洋への Sr の河川流入フラックスは何 mol/year であったか求めよ。ただし海洋質量は 1.4×10^{21} kg とする。
- 6-8. 1 億年以上の長期的な時間スケールで大陸風化量が増加したとする。この増加にともなって大気 CO_2 濃度と海洋での生物生産量は影響を受けるとすると、それらはどのように変化すると予想されるか。大気 CO_2 濃度および海洋での生物生産量のそれぞれについて3行程度で述べよ。

[7]

7-1. 実関数 $u(x, y)$ は 2 回微分可能であり、次の微分方程式を満足する。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

7-1-1. $x = 0$ および $x = L$ ($L > 0$) で $u = 0$ 、 $y = 0$ で $u = 0$ 、 $y = L$ ($0 < x < L$) で $u = u_0$ の場合、 $0 < x < L$ 、 $0 < y < L$ における解を求めよ。

7-1-2. 上式を差分方程式に置き換えることを考える。微分係数は、次のような差分に置き換えられる。

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{u(x + d, y) - u(x, y)}{d} \quad \text{ただし、} d \text{ は微小量}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を、 $u(x + d, y)$ 、 $u(x, y)$ 、 $u(x - d, y)$ 、 d 等を使って表せ。

7-1-3. 有限な解が存在する領域内では、 $u(x, y)$ は極大値も極小値もとらないことを、7-1-2 の差分方程式を使って示せ。

7-1-4. 連続した領域の境界における $u(x, y)$ の値を与えれば、領域内の解が求まることを、7-1-2 の差分方程式を使って示せ。

7-2. Bessel 関数 $J_n(z)$ は、関数 $f(z) = e^{\frac{z}{2}(w - \frac{1}{w})}$ を、ある固定した z に対して $0 < |w| < \infty$ 領域で Laurent 展開したときの、 n 次の項の係数として定義できる。

$$e^{\frac{z}{2}(w - \frac{1}{w})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n$$

7-2-1. 次の 2 つの漸化式が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned} \frac{2n}{z} J_n(z) &= J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \\ 2J'_n(z) &= J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \end{aligned}$$

7-2-2. 次の式が、成り立つことを示せ。

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

7-2-3. $w = e^{i\theta}$ とおくことにより、次の式が成り立つことを示せ。

$$\sin(z \sin \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} 2J_{2n+1}(z) \sin\{(2n+1)\theta\}$$

[8]

質量 M と m の 2 つの質点を、長さ l の糸に結び、図 1 のように、質点 M は机にある穴から下へ垂らし、机の上の質点 m を、角速度 Ω で回転させる。ここで、糸はぴんと張った状態にして、糸の質量は M や m に対して無視でき、摩擦はどこでも働かないことにする。

- 8-1. 最初に質点 m を回転させないとすれば ($\Omega = 0$)、質点 M と m は、どのように運動するか。運動方程式を作り、説明せよ。
- 8-2. 回転があるとき、この質点 M と m が作るシステムの運動エネルギー（これを T とする）を求めよ。ただし、質点 m の机の上の位置を示すために、質点 m の穴の中心からの距離を r とする円柱座標系 (r, ϕ, z) を使い、質点 M の z 座標の位置のために、 $s = -(l - r)$ という変数を導入する。ここから、変数としては、 s と ϕ を使うことにする。
- 8-3. 質点 M と m が作るシステムのポテンシャルエネルギー（これを V とする）を求めよ。
- 8-4. 質点 M と m が作るシステムのラグランジアン L を求めよ。
- 8-5. 質点 M と m が作るシステムのもつ角運動量 A は一定であることを示せ。
- 8-6. 質点 M と m が作るシステムの全エネルギーは保存することを示せ。
- 8-7. 質点 M と m が作るシステムはどのような運動をするか述べよ。

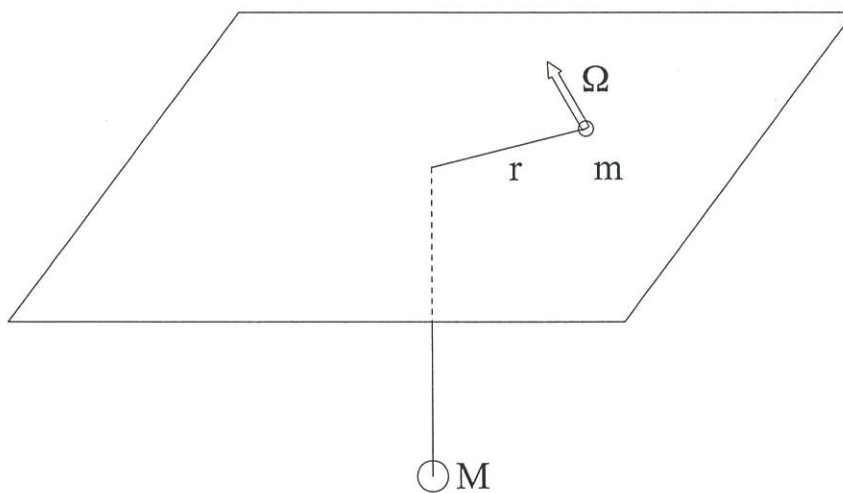


図 1