

専門科目（午前）

27 大修

地球惑星科学

時間 9:30 ~ 12:00

注意事項

- 1.以下の4問(1~4)中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
- 2.解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
- 3.各解答用紙に必ず問題番号(1~4)及び受験番号を記入せよ。

[1] 水素原子内の電子の運動を考える。ここでは特に、原子核に対する電子の相対運動に注目する。原子核の質量は電子質量に比べて十分に大きいので、原子核の運動は無視する近似を用いる。

このとき、電子の運動に関するハミルトニアンを H 、波動関数を $\Psi(\mathbf{r})$ とすると、時間に依存しない Schrödinger 方程式は次式で表される。

$$H\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}) + V(r)\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

ここで、 $\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数)、 m は電子の質量である。以下では原点に原子核があるとし、極座標 (r, θ, ϕ) を用いる。なお、極座標のラプラシアン Δ は次式で与えられる。

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

1-1. 次の各問に答えよ。答えにいたるまでの考え方等も記すこと。

1-1-1. 電子に働くクーロン力は、素電荷を e 、真空の誘電率を ϵ_0 とすると、

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \mathbf{r}}{r^2}$$

で与えられる。この場のポテンシャル $V(r)$ を求めよ。ただし、 $V(r)$ は条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$$

を満たすとする。

1-1-2. 波動関数 $\Psi(r, \theta, \phi)$ が $\Psi = R(r)Y(\theta, \phi)$ と表されると仮定して、(1) 式より、 $R(r)$ と $Y(\theta, \phi)$ のそれぞれに関する2つの微分方程式を導け。

1-1-3. 動径方向の波動関数 $R(r)$ が次式の通り表されると仮定する。

$$R(r) = \frac{f(r)}{r} \exp\left(-\frac{r}{na}\right)$$

すると、問 1-1-2 で求めた $R(r)$ に関する微分方程式を変数変換することにより、 $f(x)$ に関する次の微分方程式が導かれる。

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{df(x)}{dx} + \left[\frac{n}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] f(x) = 0 \quad (2)$$

ここで、 n (主量子数) は 1 以上、 l (方位量子数) は 0 以上の整数であり、 $x = 2r/(na)$ 、 $E = E_n = -e^2/(8\pi\epsilon_0 a n^2)$ 、 $a = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (me^2)$ である。

主量子数 $n = 2$ 、方位量子数 $l = 0$ に対応する微分方程式 (2) の解を、関数 $f(x)$ を次の通りべき級数展開することにより求めよ。(級数が x の 1 次から始まることに注意せよ。)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$$

- 1-2. 主量子数 $n = 1$, 方位量子数 $l = 0$ の状態は基底状態であり, 1s 軌道と呼ばれる。
この状態の波動関数 Ψ_{10} は方向 (θ, ϕ) によらず r だけの関数で, 次式で表される。

$$\Psi_{10}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{a^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (3)$$

ただし, $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ である。

- 1-2-1. 電子が 1s 軌道に入っているとき, この電子の存在確率は原子核の中心からの距離 r のみの関数で表される。この電子を見出す確率をもっとも高い r を求め, a を用いて表せ。
- 1-2-2. 1s 軌道にある電子が持つクーロンポテンシャルエネルギーの期待値 $V_1 \equiv \langle V \rangle$ を求め, $E_1 = -e^2/(8\pi\epsilon_0 a)$ を用いて表せ。
- 1-2-3. 電子が 1s 軌道に入っているとき, この電子の運動エネルギーの期待値 K_1 はいくらか。 E_1 を用いて表せ。
- 1-2-4. 主量子数 n と方位量子数 l が $(n, l) = (3, 0), (4, 0)$ の状態にある電子が持つ運動エネルギーの期待値をそれぞれ K_3, K_4 とする。 K_3, K_4 はいくらか。 E_1 を用いて表せ。

[2]

2-1. 次の各問に答えよ。ただし、 t は実数で、 $x(t)$ は t を独立変数とする実数値関数である。また、 $\gamma, \omega, \omega_0, f$ は正の実定数とし、 $\omega^2 - \gamma^2 > 0$ とする。

2-1-1. 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0$$

2-1-2. 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = f \cos(\omega_0t)$$

2-1-3. 次の微分方程式の $0 \leq t$ における解を求めよ。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = f \cos(\omega t)$$

ただし、 $x'(t) = dx/dt$ として、初期条件は $t = 0$ のとき $x(0) = 0, x'(0) = 0$ とする。

2-2. 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。固有ベクトルは大きさが 1 となるように規格化せよ。なお、 θ は実数である。

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

2-3. 次の積分 $I(x)$ を考える。ただし、 x は正の実数とする。

$$I(x) = \int_0^\infty \exp[x(\log z - z)] dz$$

2-3-1. 関数 $f(z) = \log z - z$ のグラフを描け。ここで、 z は正の実数で、 \log は自然対数である。

2-3-2. $x \gg 1$ のとき、積分 $I(x)$ は次の通り近似できることを示せ。

$$I(x) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-x}$$

[3]

3-1. 次の文章を読んで以下の問いに答えよ。必要であれば H, O, Mg, Si, Fe の原子量としてそれぞれ 1, 16, 24, 28, 56 を用いよ。

火成岩や海水、大気など、天然に産する様々な試料の化学組成を精密に求めることは地球化学において極めて重要である。ここでは固体地球の主要な構成要素である、(A)ケイ酸塩鉱物を主成分とする岩石試料（ケイ酸塩試料とよぶ）の化学分析について考えよう。一般的にケイ酸塩試料を化学分析するには、試料を完全に分解する必要がある。一例として炭酸ナトリウムを用いたアルカリ融解法を考えよう。ケイ酸塩試料を白金るつぼに入れ、炭酸ナトリウムと共に熱すると、試料は(B)炭酸ナトリウム融体中に融解し、冷却するとガラス状の融成物を形成する。この融成物に塩酸を加えると、(C)ゲル状の沈殿が発生する。溶液を加熱して沈殿を熟成させ、塩酸酸性での蒸発乾固を繰り返すと、沈殿は塩酸不溶性となる。乾固物に希塩酸を加えて濾過をし、濾紙を磁製のつぼに入れて強熱すると、白色の固体が残存する。この(D)固体の重量を測定することで、岩石中のケイ素含有量が分かる。一方、その他の金属元素は濾液の方に存在するため、(E)さらなる操作を加えることで段階的に元素の定量を行うことができる。

- 3-1-1. 下線部 A について、玄武岩を考えよう。玄武岩はケイ酸塩鉱物を主成分とするが、ケイ酸塩以外の鉱物が含まれることも多い。玄武岩に含まれるケイ酸塩以外の鉱物名と化学組成を 2 種類答えよ。
- 3-1-2. 下線部 B について、ケイ酸塩鉱物のひとつである MgSiO_3 を考え、炭酸ナトリウムにより融解する化学反応式を求めよ。
- 3-1-3. 下線部 C のゲル状沈殿物はケイ素の化合物である。その化学組成を述べよ。
- 3-1-4. ある火成岩試料 X を 1.20 グラム用いて上記のアルカリ融解を試みたところ、下線部 D の固体重量は 0.63 グラムであった。試料 X の Si 濃度 (wt.%) を答えよ。
- 3-1-5. 下線部 E の操作に従い、火成岩試料 X の Fe 濃度を求めたところ、8.0 wt.% であった。この試料の FeO および Fe_2O_3 濃度 (wt.%) をそれぞれ求めよ。ただし、火成岩の Si 濃度 (wt.%) と $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ モル比の間には $[\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}] = 0.016 \times [\text{Si}] + 0.03$ の関係があるとする。

3-2. 次の文章を読んで以下の問いに答えよ。必要であれば O, Mg, Al, Si の原子量としてそれぞれ 16, 24, 27, 28 を用いよ。また、 $\sqrt{2} = 1.4$, $\sqrt{5} = 2.2$ とする。

我々の太陽系には様々な元素がそれぞれどのような割合で存在しているのだろうか。大まかな値としては太陽の元素存在度を考えればよい。図 1 は_(A)観測によって求めた太陽光球の元素存在度である。横軸は原子番号(Z)、縦軸は水素の原子数を 10^{12} 個としたときの各元素の相対元素存在度を対数で表したものである。図 1 の特徴として、H と He が全体の 99% を占めること、_(B)Z が奇数の元素は両隣 (Z±1) の元素より存在度が低いこと、そして_(C)大局的には原子番号の増加とともに元素存在度が減少すること、などがあげられる。一方、図 2 は太陽光球と始原的隕石の一種である CI コンドライトの元素存在度を比較したものである。_(D)いくつかの例外はあるものの、両者は非常によい一致を見せる。従って、CI コンドライトは原始太陽系星雲の化学組成を一部の元素を除きそのままよりこんだ天体に由来すると考えられる。

3-2-1. 下線部 A について、太陽光球の元素存在度を決定する観測方法を一つあげ、その原理について 5 行以内で述べよ。

3-2-2. 太陽の元素存在度が下線部 B のような特徴を持つ理由を 5 行以内で述べよ。

3-2-3. 図 1 を見ると、下線部 C のルールが成立しない部分がある。そのうち、Z = 26 に存在度の極大がある理由を 3 行以内で述べよ。

3-2-4. 下線部 D について、太陽光球と CI コンドライトで元素存在度が大きく異なる元素がいくつか存在する。図 2 の元素 X および Y について元素名を答え、それぞれの不一致の原因についてあわせて 5 行以内で述べよ。

3-2-5. 表 1 はマンテル捕獲岩のデータから推定した地球上部マンテルの化学組成である。表 1、および図 1 から地球上部マンテルおよび太陽の Mg/Si 比および Al/Si 比 (重量比) を求めよ。

3-2-6. 3-2-5 で求めた地球上部マンテルと太陽の Mg/Si 比および Al/Si 比を比較すると、両者は一致していない。この不一致の原因としてどのようなことが考えられるか。太陽系における地球の起源をふまえながら、10 行以内で説明せよ。

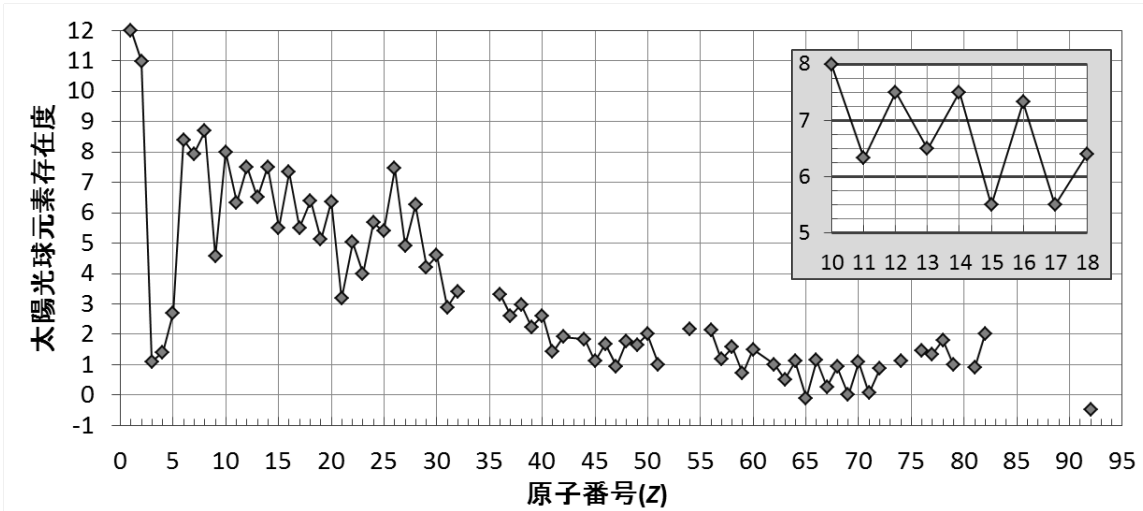


図1：観測によって求めた太陽光球の元素存在度（H原子数 = 10^{12} 個とした相対存在度の対数）。一部の元素存在度は推定値。右上の挿入図はZ = 10 から 18 までの拡大図。Palme and Jones (2003)のデータに基づく。

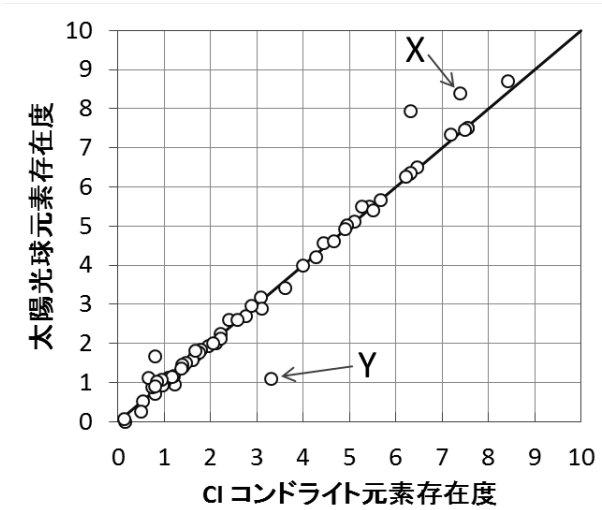


図2：太陽光球とCIコンドライトの元素存在度（H原子数 = 10^{12} 個とした相対存在度の対数）。直線はPalme and Jones (2003)のデータに基づく。

表1：マンテル捕獲岩のデータから推察した地球上部マンテルの化学組成（wt. %）。

	化学組成 (wt. %)
MgO	38.0
Al ₂ O ₃	4.8
SiO ₂	45.0

[4]

図 1 はある川沿いを調査した際に作成したルートマップである。下流から上流に向かって砂礫互層、玄武岩層、花崗岩がそれぞれ観察された。間に答えよ。

- 4-1. 地層面の「走向」と「傾斜」とは何か、それぞれの定義を答えよ。
- 4-2. 地点(1)と(2)ではともに砂礫互層が観察された。この地層を観察した結果、北側が上位であった。堆積岩層の上下判定にはどのような観察が必要か 2 行以内で述べよ。
- 4-3. 地点(3)では礫岩層と玄武岩層の間に断層が観察された。断層面の走向の向きと傾斜はそれぞれ 39W、20N であった。この断層が他の地点で観察できるとすると、それは地図上の黒丸の地点 A~D のうちどこかを答えよ。ただし、この地域には他に断層がなく、地層の褶曲もないと仮定する。
- 4-4. 地点(4)では玄武岩の溶岩が観察された。玄武岩に含まれる主要な鉱物を 3 つ答えよ。
- 4-5. 一般に、玄武岩は中央海嶺や島弧、ホットスポットなどの場所で噴出する火山岩である。中央海嶺および島弧における玄武岩質マグマの形成過程をそれぞれ 2 行以内で説明せよ。ただし「カンラン岩」という語を必ず用いること。
- 4-6. 地点(5)では玄武岩層と花崗岩の境界が観察された。この境界付近のある岩石を採集し、顕微鏡観察を行った結果、角閃岩相の変成作用を被った変成玄武岩であることが分かった。この変成玄武岩に含まれる主要な鉱物を 3 つ答えよ。
- 4-7. 地点(5)付近の花崗岩には急冷縁が観察された。またこの花崗岩は玄武岩質の捕獲岩を含んでいた。「急冷縁」および「捕獲岩」とは何か、それぞれ答えよ。
- 4-8. 一般に、花崗岩は沈み込み帯を特徴付ける岩石と考えられる。沈み込み帯における花崗岩の生成過程はいかなるものであるか述べよ (3 行程度)。
- 4-9. 地点(1)と(2)で観察された礫岩は両者とも花崗岩と玄武岩の礫を主に含んでおり、それらの礫は砂礫層の北側に分布する花崗岩と玄武岩と同種のものであった。地点(1)において礫種のモード組成は花崗岩 10%、玄武岩 90%であったのに対し、地点(2)においては花崗岩 70%、玄武岩 30%であった。このような差が生じる要因を 3 行程度で答えよ。
- 4-10. 地点(3)の断層は正断層、逆断層、横ずれ断層のどれか答えよ。またそのように判断した理由を 2 行以内で述べよ。
- 4-11. 以上の観察結果をもとに、調査地域に分布する砂礫互層、玄武岩層、花崗岩がどのような順序で形成されたかを説明せよ (3 行程度)。ただし次の語を全て用いること。[堆積、変成作用、断層運動、削剥、貫入]

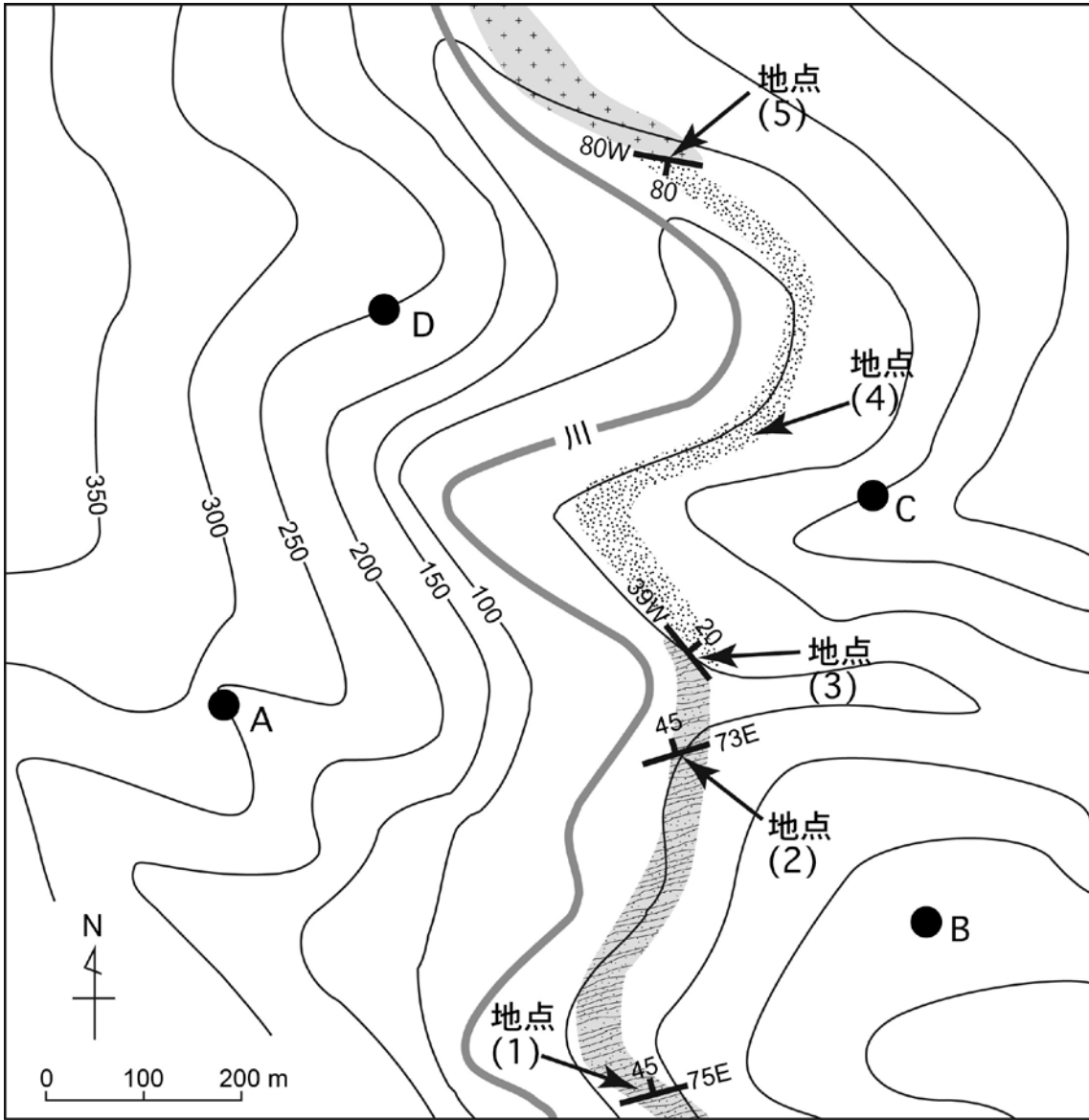


図1 作成したルートマップ

専門科目（午後）

27 大修

地球惑星科学

時間 13:30 ~ 16:00

注意事項

- 1.以下の4問（5～8）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
- 2.解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
- 3.各解答用紙に必ず問題番号（5～8）及び受験番号を記入せよ。

[5]

5-1. 次の文章を読んで以下の問いに答えよ。なお気体は理想気体とし、系は非膨張の仕事をしなとせよ。気体定数は R とし、計算で必要な場合は $R = 8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ を用いよ。

熱容量 C とは物体の温度 T を 1 K 上昇させるために必要な熱量 q であり、 $C = dq/dT$ と定義される。ある断熱容器に閉じ込められた気体に微小な熱 dq を加えたとき、系に微小な仕事 dw がなされたとすると、系の内部エネルギー U の微小変化 dU は、熱力学第一法則より

$$\boxed{\hspace{2cm}} \quad (\text{ア}) \quad (\text{式 1})$$

となる。一方、 U を温度 T と体積 V の関数とし、 U の微小変化 dU を全微分で表すと

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad (\text{式 2})$$

である。ここで、容器の体積が一定の場合を考えよう。体積一定の条件を式 1 および式 2 に適用し、更に式 1 と式 2 を連立させて dU を消去すると、

$$\frac{dq}{dT} = \boxed{\hspace{2cm}} \quad (\text{イ}) \quad (\text{式 3})$$

が得られる。式 3 の右辺のことを定積熱容量と呼び、 C_V で表す。

5-1-1. 空欄 (ア) および (イ) に入る適切な式を答えよ。

5-1-2. ここで定積熱容量を求めた方法と同様なアプローチにより、定圧熱容量 C_p が $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ で表されることを示せ。ただし H はエンタルピー、 p は圧力である。

5-1-3. 物質 1 mol あたりの C_p をモル定圧熱容量とよび、 $C_{p,m}$ で表す (単位は $\text{J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$)。ある気体の $C_{p,m}$ には温度依存性があり、温度が $T \text{ K}$ のとき

$$C_{p,m} = 30.0 + 4.00 \times 10^{-3}T + 4.00 \times 10^4 T^{-2}$$

で近似できるとする。この気体 1 mol を 200 K から 400 K まで定圧で上昇させたときのエンタルピー変化、および内部エネルギーの変化を求めよ。

5-1-4. 設問 5-1-3 の気体が体積一定の容器に閉じ込められている場合、この気体 1 mol を 400 K から 800 K まで上昇させるのに必要な熱量を求めよ。

5-1-5. 温度 T_1 におけるある系のエントロピーを S_1 とする。この系に定圧条件で熱を加え温度を T_2 にしたときの系のエントロピー S_2 を、 C_p を使った積分式で表せ。

5-1-6. 設問 5-1-3 におけるエントロピー変化を求めよ。

5-2. 反応 $4\text{Fe}_3\text{O}_4 + \text{O}_2 \rightleftharpoons 6\text{Fe}_2\text{O}_3$ について次の問に答えよ。なお、反応に関わる化合物の 25°C における標準生成ギブスエネルギー ΔG_f^0 、標準生成エンタルピー ΔH_f^0 、標準エントロピー S^0 はそれぞれ次の表の通りである。また気体定数 $R = 8.31 [\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}]$ とする。ただし、以下の設問においては ΔH_f^0 および S^0 に温度依存性はないとしてよい。

	ΔG_f^0 [kJ mol ⁻¹]	ΔH_f^0 [kJ mol ⁻¹]	S^0 [J K ⁻¹ mol ⁻¹]
Fe_3O_4	-1018	-1121	146
Fe_2O_3	-744	-826	87
O_2			205

- 5-2-1. 25°C 、1bar におけるこの反応の標準ギブスエネルギー変化 ΔG^0 を求め、 Fe_3O_4 の酸化反応が自発的に進むか否かを答えよ。
- 5-2-2. 100°C におけるこの反応の平衡定数 $\ln K$ を求めよ。
- 5-2-3. 異なる温度 T_1 および T_2 におけるこの反応の平衡定数をそれぞれ K_1 および K_2 とする。 $\ln(K_1/K_2)$ を標準エンタルピー変化 ΔH^0 、気体定数 R 、温度 T_1 および T_2 の関数として書き下せ。
- 5-2-4. 酸素分圧 $\ln(f_{\text{O}_2}) = -65$ のとき、この反応が左に進むには何 $^\circ\text{C}$ まで温度を上げればよいか答えよ。ただし簡単のため、 $[\text{Fe}_2\text{O}_3]^6/[\text{Fe}_3\text{O}_4]^4 = 1$ となる温度で反応の向きが変わると仮定する。

[6]

6-1. 下の枠内にある選択肢から適切な言葉を選び、結晶構造に関する下の文章を完成させよ。解答用紙に記号に当てはまる言葉を記入すること。

結晶は周期的な構造の繰り返しで構成される。原子の 3 次元的周期配列、すなわち結晶構造は (ア) と (イ) の 2 つの概念を組み合わせたものである。点対称性によって格子は 7 つの結晶系に分類することができ、それぞれの名称は立方晶系、正方晶系、(ウ)、(エ)、斜方晶系、(オ)、三斜晶系である。これらの結晶系を定義する (カ) 個の定数を格子定数と呼ぶ。結晶系の点対称性を保ったまま、格子点を加えることで、新たな並進対称性をもつ 7 つの格子を加える事ができる。これらすべての格子を総称して (キ) と呼び、格子点にのみ原子が配列する (ク)、格子点に加えて内部に原子が位置する (ケ)、格子点に加えて各面に原子が位置する面心格子などに分類される。結晶構造は、(キ) と (イ) で決まるが、(キ) の対称性を満たした上で、(イ) の対称性を分類すると、全部で 230 個の (コ) が存在し、すべての結晶はこのいずれかに属することになる。

ブラベー格子、 36、 立方体、 球体、 格子、 底心格子、 128、 六方晶系 三方晶系、 単斜晶系、 14、 単純格子、 体心格子、 6、 空間群、 単位構造 平行六面体、 ピアソン記号

6-2. 図1はMgOの結晶構造模型である。MgOに関する以下の設問に答えよ。

- 6-2-1. 図1に示す結晶単位格子中に含まれるMg及びOの原子数をそれぞれ求めよ。
- 6-2-2. MgOはFeOと連続固溶体を形成する。このような固溶体を形成する鉱物では、単位胞の体積と化学組成が関連する場合が多い。(Mg_{1-x}Fe_x)Oについて、単位胞の体積と化学組成が関連する理由を2行以内で説明せよ。
- 6-2-3. 粉末X線回折法は物質の結晶構造や格子体積を調べる際に一般的に用いられる手法である。粉末X線回折法を用いて対象試料の結晶構造及び格子定数を決定する手順を5行以内で説明せよ。
- 6-2-4. (Mg_{1-x}Fe_x)Oの格子定数 a が4.211 Å (MgO端成分) から4.308 Å (FeO端成分) まで鉄含有量 $\frac{x\text{FeO}}{(1-x)\text{MgO}+x\text{FeO}}$ に対して直線的に変化するものとする。X線回折測定によって(Mg_{1-x}Fe_x)Oの(111)反射の面間隔が2.442 Åであった場合の(Mg_{1-x}Fe_x)Oの化学組成を求めよ。(Mg_{1-x}Fe_x)Oは立方晶とする。ただし、 $\sqrt{2}=1.414$ 、 $\sqrt{3}=1.732$ 、 $\sqrt{5}=2.236$ とする。
- 6-2-5. 実在の結晶は完全結晶ではなく種々の欠陥を含んでいる。MgOやFeOのようなイオン性結晶における点欠陥の特徴について、下の枠内の語句を全て用いて5行以内で答えよ。必要であれば図を用いてもよい。

定比性、不定比性、空孔、電気的中性、ショットキー欠陥
格子間イオン、フレンケル欠陥

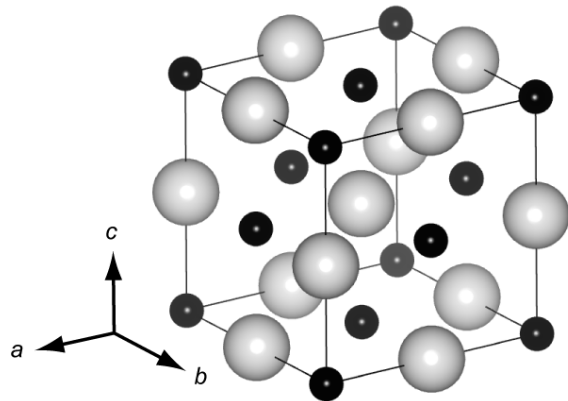


図1 MgOの結晶構造模型

6-3. かんらん石をはじめとするマントル主要構成鉱物に関する以下の問いに答えよ。

6-3-1. 図2 (A)、(B) は、かんらん石固溶体の Mg 端成分である Forsterite の結晶構造をそれぞれ (100) 面及び (001) に垂直な方向から見た図である。図からわかるように、かんらん石中の SiO_4 四面体同士はネットワーク構造を作っていない。このような珪酸塩鉱物のグループの名称を下の枠内の選択肢の中から選べ。

ソロ珪酸塩、 イノ珪酸塩、 フィロ珪酸塩、 ネソ珪酸塩、 テクト珪酸塩

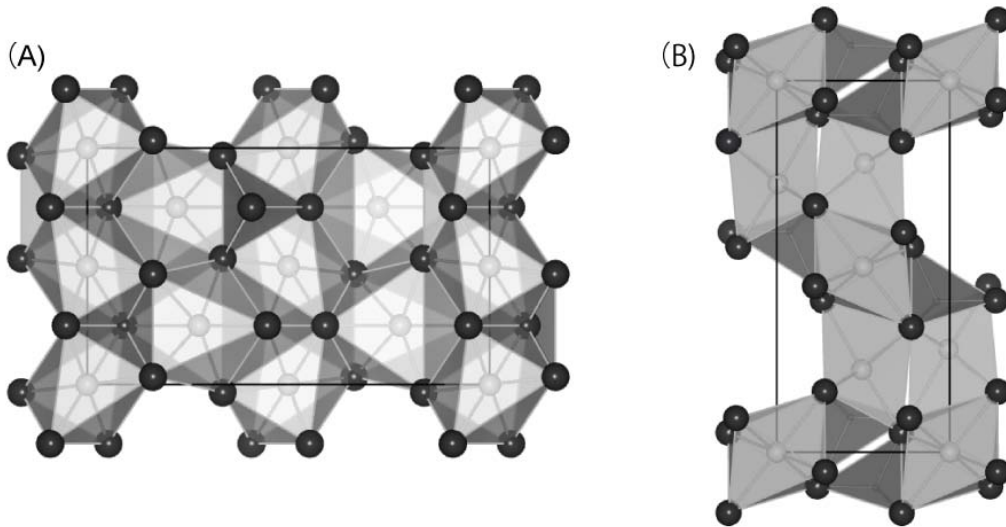


図2 Forsterite の結晶構造

6-3-2. かんらん石の結晶構造がポーリングの第2規則を満足することを示せ。ここで、ポーリングの第2規則とは、「安定な配位構造において、配位多面体をなす陰イオンの電荷は、多面体の中心にある陽イオンから到達する静電結合力（陽イオンの電荷をその配位数で割った値）によって相殺される」という経験則である。

6-3-3. かんらん石の化学組成が $(\text{Mg}_{0.8}\text{Fe}_{0.2})_2\text{SiO}_4$ で、格子定数が $a = 4.8 \text{ \AA}$, $b = 10.2 \text{ \AA}$, $c = 6.0 \text{ \AA}$ の場合の理論密度は何 g/cm^3 か計算せよ。ただし、かんらん石は斜方晶系に属し、単位胞中に含まれる分子数は4である。また、計算には O, Mg, Si, Fe の原子量としてそれぞれ 16, 24, 28, 56 を、アボガドロ数は $6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ の値を用いること。

6-3-4. かんらん石は高温高压下で異なる結晶構造へと相転移を起こす。かんらん石の高压多形鉱物の鉱物名を答えよ。

6-3-5. かんらん石などのマントル主要構成鉱物の高压相転移と地球内部の地震波不連続面との関係について5行以内で述べよ。

[7]

$[-\pi, \pi]$ の領域において、連続で何回も微分可能な周期関数 $f(x)$ は、フーリエ級数であらわせる。
次の各問いに答えよ。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

7-1. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を使って、次の式を示せ。

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{2} \{ \sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi) \}$$

7-2. 次のようにフーリエ級数の和を r で打ち切った式を考える。

$$S_r(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^r \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

次の式が成り立つことを示せ。

$$S_r(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^r \cos \{n(t-x)\} \right] f(t) dt$$

7-3. $\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ を使って、次の式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^r \cos \{n(t-x)\} = \cos \left\{ \frac{r+1}{2}(t-x) \right\} \frac{\sin \left\{ \frac{r}{2}(t-x) \right\}}{\sin \left\{ \frac{1}{2}(t-x) \right\}}$$

7-4. 次の式が成り立つことを示せ。

$$S_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left\{ (r + \frac{1}{2})(t-x) \right\}}{\sin \frac{t-x}{2}} f(t) dt$$

7-5. デルタ関数は、 $\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}$, $n \rightarrow \infty$ のように表すことができる。このことを使って、 $r \rightarrow \infty$ の時に、 $S_r(x)$ が $f(x)$ になることを示せ。

7-6. $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ を、 a_n, b_n を使って表せ。

[8]

8-1. ポテンシャルが $V(r)$ で与えられる中心力が働いている時、質量 m の1つの質点が安定な定常運動をする条件を考える。ここで「安定な定常運動」とは、万有引力の作用下で起こる楕円運動のようなものを考えればよい。

8-1-1. この質点が xy 平面内を運動しているとして、極座標 (r, ϕ) を使って運動エネルギー T が次のように表せることを示せ。

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$$

8-1-2. 角運動量 $mr^2\dot{\phi}$ が一定になることを示せ。ここで、その一定値を $h = mr^2\dot{\phi}$ とする。

8-1-3. この質点の力学的エネルギーを E とすると、次のように書けることを示せ。

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2m} \frac{1}{r^2} + V(r)$$

8-1-4. この質点が $r_1 \leq r \leq r_2$ の範囲内で周期運動するのは、

$$U(r) = \frac{h^2}{2m} \frac{1}{r^2} + V(r)$$

が、この範囲内で極小値をもつときであることを、図等を使って説明せよ。

8-1-5. ポテンシャル $V(r)$ が $V(r) = kr^a$ と与えられる場合、 k と a に課せられる条件を示せ。

8-2. 海の中に2つの導体球を離して入れて、その間の電流と電位差の測定から、海水の電気伝導度 σ を求めることを試みる。

8-2-1. 半径 a と b ($0 < a < b$) の2つの同心の導体球殻(厚さは無視)の間に、一様な電流を流すと電位差 V ができる。この2つの球殻の間の電位ポテンシャル $\phi(r)$ を求めよ。ここで、2つの球殻の中心を原点として極座標 (r, θ, ϕ) を導入し、 $r = a$ での電位を V 、 $r = b$ での電位を0とする。電荷はどこにも貯まらないと考える。

8-2-2. この2つの半径 a と b の球殻の間の電場 $\mathbf{E}(r)$ を求めよ。

8-2-3. この2つの半径 a と b の球殻の間の物質の電気伝導度を σ とする。電流密度 \mathbf{j} と電場 \mathbf{E} の間には $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ の関係がある。このとき、この2つの球殻の間の抵抗 R を求めよ。

8-2-4. ここで、 b を無限大とすると、抵抗 R と半径 a との間には、どのような関係ができるかを示せ。

8-2-5. 半径 r_1 と半径 r_2 の導体球を d だけ離して海水に入れて、電位差と電流の測定から抵抗 R を求める。この抵抗値 R から、海水の電気伝導度 σ を求める式を示せ。ただし、 d は r_1 、 r_2 よりも十分に大きいとする。