専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　２８　大修

地球惑星科学　　　　　　　　　　　　時間 9:30 ～ 12:00

注意事項

1.以下の４問（１～４）中２問を選んで解答せよ。解答する問題は２問をこえてはならない。

2.解答は１問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。１問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。

3.各解答用紙に必ず問題番号（１～４）及び受験番号を記入せよ。

[1]

1-1. 3 次元 xyz 座標系で，位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とする。

1-1-1. ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{r}$ の関数とする。このとき，次の空欄 $\boxed{(1)}$, $\boxed{(2)}$ に当てはまる適当な式を記せ。ただし，導出過程も記述すること。

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boxed{(1)} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) + \boxed{(2)} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

1-1-2. 定ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$r = |\boldsymbol{r}|$ とする。次の空欄 $\boxed{(3)}$, $\boxed{(4)}$ に当てはまる適当な式を記せ。ただし，導出過程も記述すること。

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \right) = \boxed{(3)} + \boxed{(4)}\,\boldsymbol{r}$$

1-2. 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。ただし，固有ベクトルは互いが直交し，それぞれの大きさが 1 となるように規格化せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1-3. 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} = -ay + bx + c$$

ただし，x は実数，y は x の実関数，a, b, c は実数の定数とする。

1-4. 各問に答えよ。

1-4-1. 次の文中の空欄 $\boxed{(5)}$, $\boxed{(6)}$ に当てはまる適当な式を記せ。

3 変数 x, y, z の関数 $f(x,y,z)$ の極値を，$g(x,y,z)=0$ という条件の下で求めたい。このような場合，ラグランジュの未定乗数法がよく使われる。

関数 $f(x,y,z)$ が極値をとるのが，$x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ の時だとする。未定乗数 λ を導入し，4 変数の関数 $F(x,y,z,\lambda)$ を

$$F(x,y,z,\lambda)=\boxed{(5)}$$

と定義する。すると，4 変数の関数 $F(x,y,z,\lambda)$ は $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, $\lambda=\lambda_0$ の時に極値をとる。

関数 $F(x,y,z,\lambda)$ が極値をとるときは，

$$\begin{aligned}
\boxed{(6)} &= 0 \\
\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{x_0,y_0,z_0,\lambda_0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{x_0,y_0,z_0,\lambda_0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right|_{x_0,y_0,z_0,\lambda_0} &= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。これは，4 変数 x_0, y_0, z_0, λ_0 に対する連立方程式であり，これを解くと x_0, y_0, z_0, λ_0 が得られる。それらを $f(x,y,z)$ に代入すると，極値を求めることができる。

1-4-2. 次の式で表される楕円体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

に内接する直方体の体積の最大値を求めよ。

ただし，a, b, c は正の定数である。

[2]

2-1. 一般に磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を使って $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ と表せる。超伝導体の中では，電流密度とベクトルポテンシャルの間に定数 $\alpha\ (>0)$ を使って $\boldsymbol{A} = -\alpha \boldsymbol{j}$ という関係が成り立つと仮定する。

2-1-1. 超伝導体の中では，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が次の関係式を満たすことを示せ。必要なら，条件を加えよ。

$$\Delta \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{\alpha} \boldsymbol{B}$$

2-1-2. $x \geq 0$ の領域に超伝導体を置き，$x < 0$ の領域は真空とする。$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ という z 方向の一様な磁場を全体に外からかけると，$x > 0$ の領域に磁場はほとんど入り込めないことを示せ。$\boldsymbol{B}$ は x のみの関数と考えてよい。必要なら，条件を加えよ。

2-1-3. 問 2-1-2 の時，$x = 0$ の境界面を流れる電流の電流密度を求めよ。電流の方向も示すこと。

2-2. ポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ の中を運動する一つの粒子（質量 m）を考える。粒子に伴う波動を考え，波動関数を $\varphi(\boldsymbol{r})$，エネルギーを E とすると，時間を含まない Schrödinger 方程式は以下のように表される。ここで，$\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数) である。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}) + V(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r}) = E\varphi(\boldsymbol{r})$$

2-2-1. ポテンシャルが $V(x,y,z) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$ であるとき，粒子の波動関数は $\varphi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ の形に書ける。このとき，Schrödinger 方程式を x, y, z 座標について 1 次元の場合に変数分離せよ。

2-2-2. x 方向について，座標とエネルギーをそれぞれ適切な規格化をして ξ, λ へ変換し，波動関数を $X(\xi) = f(\xi)\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$ とおくことで，$f(\xi)$ に対して以下の形の微分方程式が得られることを示せ。

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2\xi\frac{df}{d\xi} + (\lambda - 1)f = 0$$

2-2-3. 問 2-2-2. において $f(\xi)$ を以下のようにべき級数に展開する。

$$f(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$$

これを用いて，波動関数 $X(\xi)$ が有界となるために λ が満たすべき条件を求めよ。

2-2-4. x 方向について，エネルギーが最低の状態（基底状態）から数えて 3 つの状態について波動関数 $X(\xi)$ をそれぞれ求めよ。

2-2-5. 全系のエネルギー固有値を求めよ。また，$\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$ のとき，基底状態から数えて $(n+1)$ 番目のエネルギー固有値に対応する固有状態は何重に縮退しているか。

[3]

3-1. 次の文章を読み、以下の問いに答えよ。

現在、地球上では 50,000 個以上の隕石が発見されている。隕石 A では、直径 0.1–数 mm の(1)球状物質のほか、不定形の(2)白色物質、金属、および細粒の基質の 4 成分がランダムに混合している（図 A)。隕石 B は金属質であり、表面を研磨して希酸で処理すると、組成の異なる 2 つの相が組み合わさった(3)特徴的な帯状組織が観察される（図 B)。隕石 C は主として輝石、斜長石からなり、(4)サブオフィティック組織を示す（図 C)。

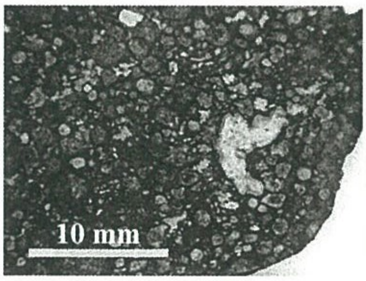


図 A

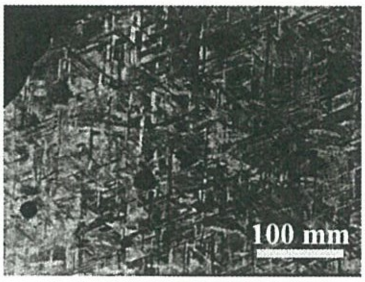


図 B

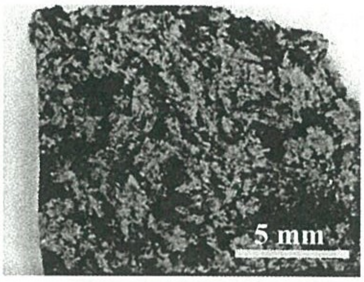


図 C

（図 B は Treatise on Geochemistry vol.1 より引用）

3-1-1. 下線部(1)の球状物質について、その名称を答えよ。また、球状物質を構成する主要な鉱物の名称を 2 つあげ、かつそれぞれの化学式を示せ。

3-1-2. 下線部(2)の白色物質を構成する元素のうち、主要なものを 4 つ答えよ。また、なぜその 4 元素が主要元素であるのか、白色物質の形成過程に言及しながら 5 行以内で説明せよ。

3-1-3. 下線部(3)の特徴的な帯状組織について、その名称を答えよ。また、その帯状組織が形成される過程を 3 行以内で説明せよ。

3-1-4. 下線部(4)にあるサブオフィティック組織とはどのようなものか、図 C を参考に、下記の 5 つの語句を全て用いて 3 行以内で説明せよ。
【一部・輝石・斜長石・完晶質・自形】

3-1-5. 隕石 A の球状物質と白色物質の形成年代は 45 億年より古いことがわかっている。両者の形成年代をより高精度で測定したい。最も適切な年代測定の手法を考え、その原理を 10 行以内で述べよ。式や図を用いても良い。

3-2. 次の文章を読み、以下の問いに答えよ

隕石中や隕石衝突痕では地球深部に相当する温度圧力条件で安定な高圧鉱物が発見されることがある。一方、静水圧条件で行う高圧実験では、石英は圧力の上昇に伴い、約（A）GPa においてコーサイトに相転移し、さらに約 10 GPa において（B）に相転移を起こす。その結果、石英とコーサイトの珪素の配位数が（C）であるのに対し、(B) の珪素の配位数は（D）に変化する。

3-2-1. （A）～（D）それぞれに入る最も適当な数字または語句を答えよ。

3-2-2. 珪素の配位数が圧力と共に変化する理由を 3 行以内で答えよ。

3-2-3. 2014 年、隕石中から空間群 *Pnma* のペロフスカイト構造をもつマグネシウム珪酸塩鉱物が初めて確認され、ブリッジマナイト（bridgmanite）と命名された。この鉱物の結晶構造の特徴について以下のキーワードを全て用いて 3 行以内で説明せよ。【配位数、配位多面体、許容因子、晶系、高圧相転移】

3-2-4. 地球深部物質と考えられる高圧鉱物は、隕石中の他に、マントル捕獲岩中でもみつかることがある。近年、マントル捕獲岩中に存在するダイヤモンド包有物中にリングウッダイト（ringwoodite）が発見され、この鉱物中に最大で約 2.5 wt.%もの水が含まれていることが報告されている。この他に、マントル内部の水の分布を推定する手法をあげよ（5 行以内）。

3-2-5. 常温常圧において熱力学的に安定でない鉱物が隕石中やマントル捕獲岩中で観察される理由を 5 行以内で説明せよ。

[4]

次の文章を読んで以下の問いに答えよ。ただし光速度を c、プランク定数を h とする。

気体水素をガラス管に封じ込め電気放電を行うと、H_2 分子は解離し、その時光が発せられる。この光を分光観察すると、一連の線スペクトルが見られる。この線スペクトルの波数 $\tilde{\nu}$ は以下の式に従うことが知られている。

$$\tilde{\nu} = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{{n_1}^2} - \frac{1}{{n_2}^2}\right) \qquad (\text{式 } 1)$$

ただし n_1 は自然数、$n_2 = (n_1 +1), (n_1 +2), (n_1 +3)\cdots$ を満たす整数、R_{H} はリュードベリ定数（$R_{\mathrm{H}} = 1.10\times10^5\ \mathrm{cm^{-1}}$）である。

4-1. 式 1 より、線スペクトルの波数は連続的な値をとらず、離散的な値を持つことが分かる。その理由を 3 行以内で述べよ。ただし、「遷移」と「励起」の 2 つの語句を必ず用いること。

4-2. n_1 = 1、2、3、4 のとき得られるスペクトルをそれぞれライマン系列、バルマー系列、パッシェン系列、ブラケット系列とよぶ。これら系列の違いは物理化学的に何を表しているか、3 行以内で述べよ。

4-3. ライマン系列において最大波数と最小波数のスペクトル線の波長をそれぞれ求めよ（単位は nm）。

4-4. これら 4 つの系列を比較したとき、可視光領域のスペクトル線の数が最も多い系列を答えよ。計算の過程も示すこと。

4-5. 基底状態における水素原子のイオン化エネルギーを求めよ（単位は J）。ただし $c = 3.00\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$、$h = 6.63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$ とする。

4-6. 原子内の電子に対する 1 電子波動関数のことを原子オービタルとよぶ。水素型原子（原子番号 Z の 1 電子原子）の原子オービタルは、3 つの量子数、n（主量子数）、l（方位量子数）、m_l（磁気量子数）で定義される。これら n, l, m_l は水素型原子の電子の状態を決定づける上でそれぞれどのような役割を果たしているか。10 行以内で説明せよ。

4-7. 多電子原子の波動関数は複雑であるため、1 電子波動関数を用いて多電子系の全波動関数を近似する。この場合、ある量子数 n, l, m_l を持つ原子オービタルに入れることのできる電子の最大数はいくつか。その理由も含め、3 行以内で答えよ。

4-8. 多電子原子の電子配置を決める上で重要な「フントの規則」とはどのようなものか、3 行以内で説明せよ。ただし、「縮退」と「エネルギー準位」の 2 つの語句を必ず用いること。

4-9. 原子番号 19 番カリウム、および 42 番モリブデンの電子配置を $1s^2\cdot 2s^2\cdot 2p^6\cdots$ の形でそれぞれ表せ。

専門科目（午後）　　　　　　　　　　　　　　２８　大修

地球惑星科学　　　　　　　　　　　　　　時間 13:30 ～ 16:00

注意事項

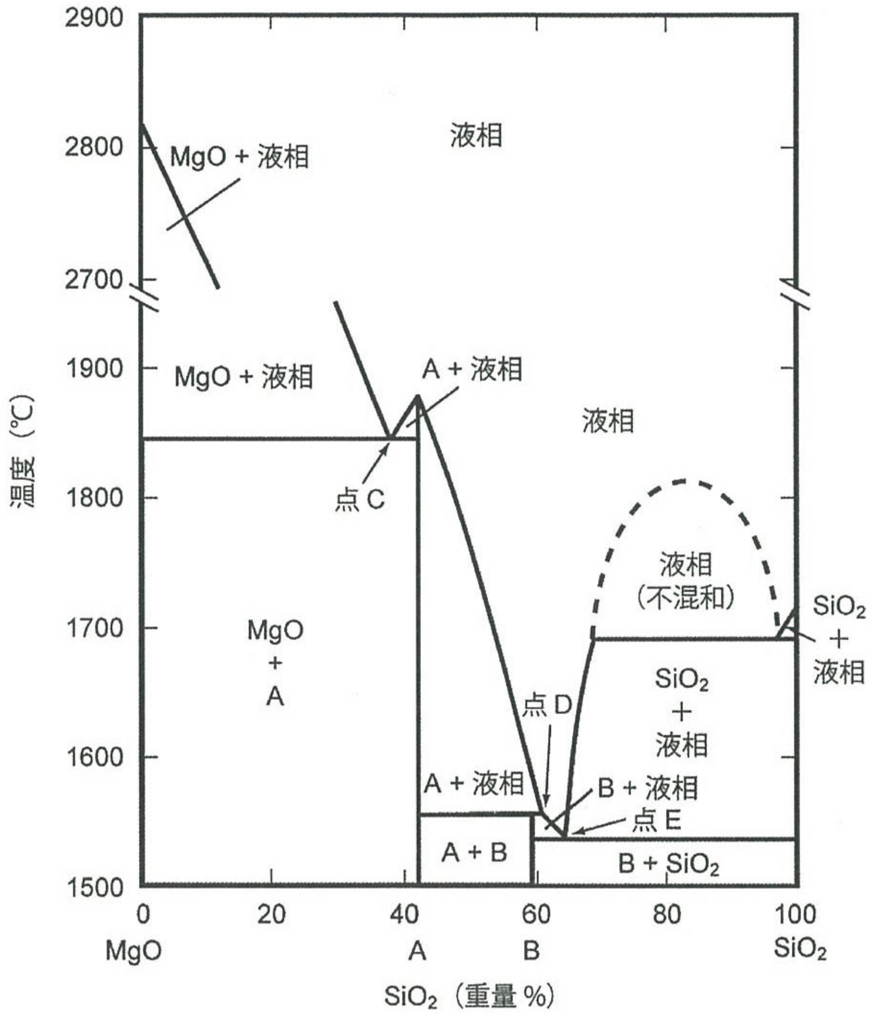
1.以下の４問（5～8）中２問を選んで解答せよ。解答する問題は２問をこえてはならない。

2.解答は１問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。１問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。

3.各解答用紙に必ず問題番号（5～8）及び受験番号を記入せよ。

[5]

5-1.　下図は 1 気圧下での MgO-SiO_2 系の相図である。これをもとに、以下の問いに答えよ。



5-1-1.　A, B の化学組成を持つ鉱物の化学式と鉱物名をそれぞれ答えよ。

5-1-2.　点 C, D, E の名称を答えよ。

5-1-3.　MgO:SiO_2 = 1:1（重量比）の化学組成をもつ 1900 ℃のマグマを 1500 ℃まで徐々に冷却した。このとき、次のア～ウに答えよ。

（ア）固化が始まる温度

（イ）固相のみになる温度

（ウ）1600 ℃における固相と液相の化学組成と量比

5-1-4.　圧力が上昇するにしたがって、点 D の位置は次第に A の結晶の方向に移動し、約 2 万気圧で B は一致融解を開始する。点 D の位置が 1 気圧から 10 万気圧まで圧力に比例して移動する場合、マントルで生成されるマグマの化学組成が圧力とともにどのように変化するか答えよ。

5-2. 次の文章を読み、以下の問いに答えよ。

地球上のマグマ活動は主に、(A) プレートの発散境界、(B) プレートの収束境界、(C) ホットスポットで行われている。マグマの噴火様式は、噴火する環境が陸上か海底かによって大きく異なる。海底でマグマが噴出すると、マグマが海水によって急冷され、マグマの外殻から冷えて固まる。そして固まっていない溶岩が外殻の割れ目から再び流出し、最終的には海底に流出した溶岩は（D）と呼ばれる特徴的な形状をもつ岩石となる。一方、火山活動が浅海で生じた場合や地中でマグマが地下水と接した場合、噴火の勢いは爆発的なものとなる。このような噴火様式を（E）と呼ぶ。

5-2-1. （A）に関して、プレート発散境界における中央海嶺玄武岩質マグマの生成メカニズムを 3 行以内で説明せよ。

5-2-2. （B）に関して、プレートの収束境界近傍における海洋プレート層序を描け。層序を構成する岩石名も書くこと。

5-2-3. （C）に関して、ホットスポットで生成されるマグマとプレート発散境界で生成されるマグマの化学的性質にはどのような相違点があるか 3 行以内で答えよ。

5-2-4. 現在の地球上のマグマ生成総量において最大規模の場所は（A）～（C）のうちのどれで、全体の約何割を占めているか答えよ。

5-2-5. （D）（E）にあてはまる語句を答えよ。

5-2-6. 海洋プレート構成する物質がマントルの底まで沈み込むとする。沈み込みの過程でかんらん石が起こす高圧相転移の深さと相転移系列を 5 行以内で答えよ。

[6]

以下の問に答えよ。ただし断りのない限り、標準状態とは 1 bar、25.00℃のことを指す。

6-1. 次のカッコ内の量のうち、状態量でないものはどれか、答えよ。
[温度 T、圧力 P、体積 V、熱量 Q、内部エネルギー U、エントロピー S]

6-2. ギブズ自由エネルギー G は、エンタルピーを $H (= U + PV)$ とすると

$$G = H - TS$$

で定義される。温度一定で、ある気体の圧力が $P = P_0$ から P_1 まで変化したとき、1 mol あたりのギブズ自由エネルギーが G_0 から G_1 に変化したとする。このとき、G_1 と P_1 の関係を示せ。ただし、気体定数を R とする。

6-3. 次の反応 1 について、標準自由エネルギー変化を求めよ。

$$HCO_3^- \rightleftarrows CO_3^{2-} + H^+ \qquad \text{(反応 1)}$$

ただし、HCO_3^-、CO_3^{2-} および H^+の標準生成自由エネルギー G_f° はそれぞれ、–586.8、–527.9 および 0 kJ·mol^{-1} である。

6-4. 反応 1 に関し、標準状態で平衡状態にある水溶液において、HCO_3^-と CO_3^{2-}の量比が等しくなる時、その pH の値を答えよ。ただし各イオンの活量係数は 1 であるとしてよい。また気体定数 $R = 8.31$ J·mol^{-1} K^{-1} である。必要であれば $\ln X = 2.30 \log X$ の関係を用いて計算すること。

6-5. 次の反応 2 について、標準状態での平衡定数 K_2 は 10 の何乗になるか答えよ。

$$CO_{2(aq)} + H_2O \rightleftarrows HCO_3^- + H^+ \qquad \text{(反応 2)}$$

ただし、$CO_{2(aq)}$および H_2O の G_f° はそれぞれ –385.9 および –237.2 kJ·mol^{-1} である。

6-6. 気相における二酸化炭素分圧が 10^{-3} bar のとき、水溶液中の HCO_3^- 濃度を求めよ。ただし、水溶液への二酸化炭素溶解はヘンリーの法則に従い、そのときのヘンリー定数は Kh = $10^{1.5}$ bar·kg·mol^{-1} である。また、上記反応 1、2 は平衡状態にあり、水溶液の pH は 8 とする。

6-7. 6-6 で示した平衡状態にある水溶液から $CaCO_3$ の沈殿が生じたとする。このとき、気相の二酸化炭素分圧はどう変化するか、簡潔に答えよ。ただし、「質量作用の法則」という語を用いて説明すること。

6-8. 炭酸カルシウムの沈殿は、海洋中に溶存する Ca の主な除去過程である。これに対し、現在の海洋から Mg を除去している主な過程のうち、炭酸塩の沈殿以外のものをひとつ、簡潔に答えよ。

6-9. 現在の海洋へ Ca を供給する主要な過程をひとつ、簡潔に答えよ。

[7]

ある多項式 $L_n(x)$ は次の母関数をもつ。次の各問に答えよ。答えの導出過程も省略せず示すこと。

$$\text{母関数} \qquad g(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-t} \exp\left(-\frac{t}{1-t}x\right)$$

$$\text{多項式} \qquad L_n(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(n!)^2}{(r!)^2(n-r)!} x^r$$

7-1. $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ を具体的に示せ。

7-2. 一般に，x の関数 $f(x)$ と $h(x)$ について，次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d^n}{dx^n}(fh) = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{d^{n-r} f}{dx^{n-r}} \cdot \frac{d^r h}{dx^r}$$

7-3. 次の式が，この多項式 $L_n(x)$ を表すことを示せ。

$$e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x}\right)$$

7-4. 母関数の対数をとり，t で偏微分した結果を具体的に示せ。

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \{g(t,x)\} = \boxed{}$$

7-5. 問 7-4 の結果を使い，$L_{n+1}(x)$, $L_n(x)$, $L_{n-1}(x)$ の関係 (漸化式) を示せ。

$$L_{n+1}(x) = \boxed{}\, L_n(x) + \boxed{}\, L_{n-1}(x)$$

7-6. 2 つの母関数を使った G を計算することにより，次の積分の値 I_{mn} を求めよ。

$$G = \int_0^{\infty} g(t,x) g(s,x) e^{-x} dx$$

$$I_{mn} = \int_0^{\infty} L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx$$

[8] 流体に関する次の連続の式と運動方程式により，波動方程式について考える。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

ここで，ρ は密度，p は圧力，v は速度を表す。また，密度と圧力の間には以下の状態方程式が成り立つ。

$$p = K\rho^{\gamma} \quad (K, \gamma \text{ は定数}) \tag{3}$$

以下では，平衡状態での値に添字 0，ゆらぎに添字 1 を付けて表すものとする (例えば，$\rho = \rho_0 + \rho_1$)。密度，圧力，速度は平衡状態において一様であり，$\rho_0 =$ 定数, $p_0 =$ 定数，$v_0 = 0$ とする。また，ゆらぎは微小であり，運動方程式中の $v_1(\partial v_1/\partial x)$ など微小量の 2 次以上の項は無視できるものとする。

8-1. まず，流体のゆらぎの時間変化を考える。

8-1-1. (1) - (3) 式より，密度のゆらぎ ρ_1 が満たす以下の波動方程式を導け。

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} = 0 \quad (c \text{ は定数}) \tag{4}$$

8-1-2. 密度のゆらぎが次の境界条件，初期条件を満たすとき，(4) 式の波動方程式を解け。
境界条件：$x = 0, L$ において $\rho_1 = 0$
初期条件：$t = 0$ において $\rho_1 = f(x), \partial\rho_1/\partial t = g(x)$

8-2. 次に，自己重力系の安定性を考える。自己重力系において (2) 式の運動方程式は以下のように表される。

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{5}$$

重力ポテンシャル Φ は平衡状態において一様であり，$\Phi_0 =$ 定数とする。また，重力ポテンシャルのゆらぎ Φ_1 は以下の関係式を満たすものとする。(G は万有引力定数)

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = 4\pi G\rho_1 \tag{6}$$

8-2-1. 問 8-1-1. と同様にして，自己重力系において密度のゆらぎ ρ_1 が満たす方程式を導け。

8-2-2. 密度のゆらぎとして、以下の式を考える。

$$\rho_1 = \rho_* \exp\{i(kx - \omega t)\} \quad (\rho_* \text{ は定数}) \tag{7}$$

問 8-2-1. で求めた方程式に (7) 式を代入し，振動数 ω と波数 k の間に成り立つ関係式 (分散関係式) を求めよ。

8-2-3. 問 8-2-2. で求めた分散関係式をもとに，密度のゆらぎが時間とともに増大するとき，波長 $\lambda = 2\pi/k$ が満たす条件を求めよ。