

筆答専門試験科目（午前）

29 大修

地球惑星科学系

時間 9:30 ~ 12:00

注意事項

- 1.以下の4問(1～4)中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
- 2.解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
- 3.各解答用紙に必ず問題番号(1～4)及び受験番号を記入せよ。

[1]

- 1-1. 図 1 のように、支点が x 軸上をなめらかに運動する振り子を考える。 x 軸を水平に、 z 軸を鉛直上向きにとり、 x 軸と z 軸の交点を原点とする。振り子の腕の長さを ℓ 、先端の質点の質量を m とし、腕の質量を無視する。時刻 t における支点の x 座標を $x_0(t)$ 、鉛直下向きからの振り子の振れ角を $\theta(t)$ とする。鉛直下向きには重力（加速度の大きさ g ）がかかっているとし、振り子は常に $x-z$ 平面内を運動するものとする。

1-1-1. 質点 m の座標 (x, z) を ℓ , x_0 , θ などを用いて表せ。

1-1-2. 質点 m の運動エネルギー K と位置エネルギー U を、 m , g , ℓ , x_0 , θ などを用いてそれぞれ表せ。

1-1-3. 振り子の支点を強制的に振動させ、 $x_0(t) = A \sin \omega t$ (A , ω ; 正の定数) とする。質点 m の運動を表す、 θ の時間に関する 2 階微分の方程式を求めよ。

1-1-4. 微小振動 $|\theta| \ll 1$ を仮定し、 ω , g , ℓ などを用いながら、振り子の運動を論ぜよ。

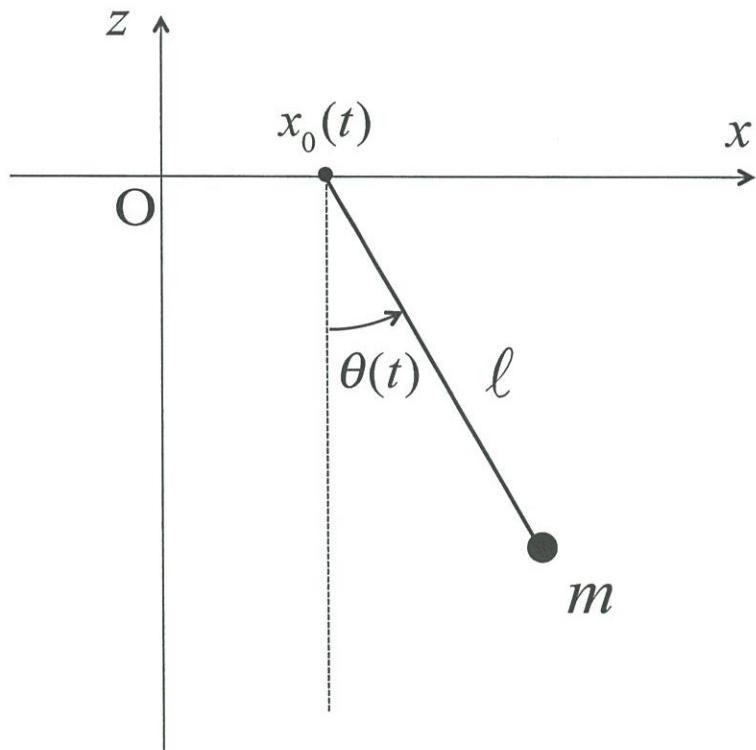


図 1

1-2. 質点1(質量 m_1)と質点2(質量 m_2)が互いの重力によって円運動をしている。質点1の位置を点 P_1 、質点2の位置を P_2 とする。図2のように、軌道面上で両質点の共通重心Oを原点とする2次元座標系として慣性系 $S(X-Y)$ と、 P_1 と P_2 が常に x 軸上に位置するような回転系 $S'(x-y)$ を考える。

質点1と2の間の距離を a 、回転系 S' の角速度を ω 、万有引力定数を G とする。このとき、軌道面上の任意の質点3(質量 m_3)の運動を考えよう。ただし、 m_3 は m_1 、 m_2 に比べて十分小さく、質点3は質点1、2の運動には影響を与えないとする。また、時刻 $t=0$ において、点 P_1 と P_2 は X 軸上にあるとする。

1-2-1. S' 系における P_1 と P_2 の座標を求めよ。

1-2-2. S' 系の角速度 ω を求めよ。

1-2-3. S 系における質点3の座標 (X, Y) を S' 系における座標 (x, y) を用いて表せ。

1-2-4. 質点3に対するラグランジアンを S' 系における座標 (x, y) と速度 (\dot{x}, \dot{y}) を用いて表せ。ただし、質点1と3の間の距離として r_1 、質点2と3の間の距離として r_2 の表記を用いてよい。

1-2-5. S' 系における質点3の運動方程式を書き下せ。ただし、質点1と3の間の距離として r_1 、質点2と3の間の距離として r_2 の表記を用いてよい。

1-2-6. S' 系から見て、質点3の加速度と速度がともに0となる点のうち、 x 軸上にない点は2つある。この2つの点 P_3 と P_4 の座標を求めよ。さらに、点 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 の位置関係について特徴を述べよ。

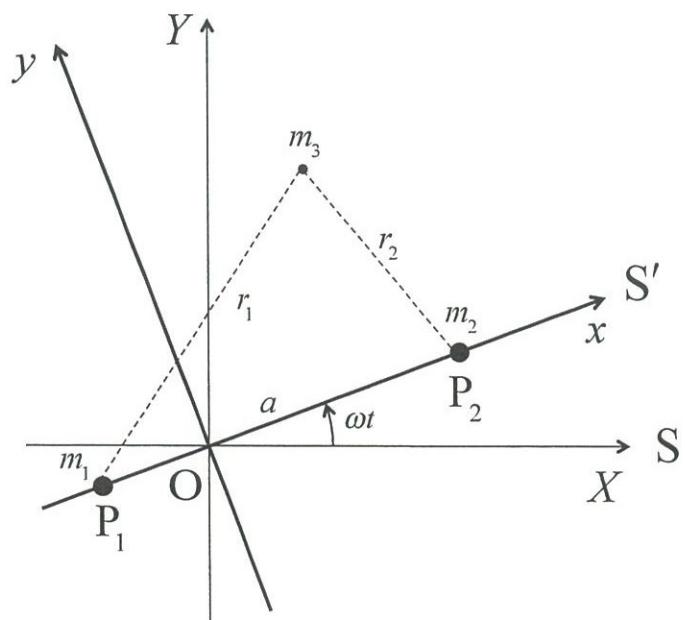


図2

[2]

以下の設問では、次の式で表されるディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ の性質を適宜使用してもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a), \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dk \quad (1)$$

ここで、 x, a, k は実数、 i は虚数単位であり、 $f(x)$ は $x = a$ で連続な関数である。

2-1. (1) 式に示すデルタ関数の性質を用いて、以下の積分値を求めよ。

$$2-1-1. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(4x-1) \sin(\pi x) dx$$

$$2-1-2. \int_{-\infty}^{\infty} \{\delta(x-1) + \delta(x+1)\} e^{i\pi x} dx$$

2-2. 関数 $y(x)$ のフーリエ変換 $Y(k)$ 、およびその逆変換をそれぞれ以下のように定める。

$$Y(k) = \mathcal{F}[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{-ikx} dx$$

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1}[Y(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(k) e^{ikx} dk$$

ここで、次の微分方程式を考える。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = R(x), \quad R(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-2x} & x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$y(x)$ は、 $x < 0$ のとき $y(x) = 0$ を満たすとする。また、以下では、次のフーリエ変換の関係を用いてもよい。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-bx} & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{のとき}, \quad F(k) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{b+ik}.$$

ただし、 b は正の実数とする。

2-2-1. 関数 $y(x)$ の $(n-1)$ 次までの導関数が $x \rightarrow \pm\infty$ で 0 になるとき、次の式が成り立つことを示せ。

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n y}{dx^n}\right] = (ik)^n Y(k)$$

2-2-2. (2) 式の両辺をフーリエ変換することにより、 $y(x)$ のフーリエ変換 $Y(k)$ を k の関数として表せ。

2-2-3. 問 2-2-2. で求めた $Y(k)$ をフーリエ逆変換することにより, (2) 式の解の 1 つ (特殊解) を求めよ。

2-2-4. (2) 式の右辺が 0 の場合の解 (齊次解) を求めよ。

2-2-5. 問 2-2-3. と問 2-2-4. の結果を用いて, (2) 式の一般解を示せ。

2-3. 次の偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(z - \zeta) \quad (3)$$

の解 G を, 以下の手順に従い求めよ。ただし, ξ, η, ζ は実数である。

2-3-1. 実数 k_x, k_y, k_z を変数とする関数 g_0 を用いて,

$$G = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(k_x, k_y, k_z) \exp[-i\{k_x(x - \xi) + k_y(y - \eta) + k_z(z - \zeta)\}] dk_x dk_y dk_z \quad (4)$$

と仮定する。(4) 式を (3) 式に代入することにより, g_0 を求めよ。

2-3-2. 3 次元直角座標系 (デカルト座標系) を使い, 各成分が k_x, k_y, k_z であるベクトル k を $k = (k_x, k_y, k_z)$ と表す。この座標系における微小体積要素 $dk_x dk_y dk_z$ を球座標 (k, θ, ϕ) を用いて表せ。ここで, $k = |k|$ である。

2-3-3. 問 2-3-2. の直角座標系におけるベクトル k とベクトル $\mathbf{R} = (x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$ のなす角を ω とすると, 内積 $k \cdot \mathbf{R}$ は

$$k \cdot \mathbf{R} = k_x(x - \xi) + k_y(y - \eta) + k_z(z - \zeta) = kR \cos \omega$$

と表される。ただし, $R = |\mathbf{R}| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ である。

ここで, 球座標系の極軸をベクトル \mathbf{R} の方向にとると, 角 ω は球座標表示における極軸からの角 θ と同一視できる。このことと, 問 2-3-1. および問 2-3-2. の結果を用いて, G が

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R}$$

となることを示せ。なお, 必要であれば $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ を用いてよい。

[3]

3-1. 火成岩に関する以下の設間に答えよ.

3-1-1. かんらん岩は深成岩の一つであり、マントル上部を構成する岩石である。かんらん岩に通常含まれる主要構成鉱物 3 つについて、鉱物名と化学組成をそれぞれ答えよ。

3-1-2. 偏光顕微鏡下において、上記 3 つの鉱物を識別する方法を 3 行以内で答えよ。

3-1-3. かんらん岩には上記 3 つの主要構成鉱物の他に、副成分鉱物として斜長石、あるいはスピネル、またはガーネットが含まれている。共存する副成分鉱物に相違が生じるのはなぜか、その主な原因を 3 行以内で答えよ。

3-1-4. 花崗岩と玄武岩は地殻を構成する代表的な岩石である。それぞれの岩石薄片を偏光顕微鏡下で観察したときの組織の特徴と、そのような組織が形成される地質学的な理由を各岩石について 5 行以内で答えよ（さらに図を加えてもよい）。

3-1-5. 火山岩を偏光顕微鏡下で観察すると、かんらん石斑晶では累帯構造が見られることはあまりないのに対して、斜長石斑晶では累帯構造がしばしば観察される。この理由を 5 行以内で答えよ。

3-2. 地球中心核に関する以下の設問に答えよ.

3-2-1. 地球中心核の主成分は鉄であると考えられており、その構造は固体の内核と液体の外核にわけることが出来る。内核と外核の構成相の違いはどのような観測事実からわかるか、3行以内で答えよ。

3-2-2. 鉄の結晶構造は、常温常圧においては体心立方構造 (α) をとり、約 900 °C で面心立方構造 (γ) に変化し、約 1400 °C で再び体心立方構造 (δ) となる。また、室温で約 13 万気圧を超えると六方最密充填構造 (ϵ) へ相転移を起こす。このとき、以下の問いに答えよ。

3-2-2-1. 体心立方格子と六方最密充填格子の充填率をそれぞれ計算せよ。

3-2-2-2. 鉄の α , γ , δ 相とある元素 X が侵入型固溶体を形成する場合、元素 X が最も多く固溶する相はどれか、理由とともに 4 行以内で答えよ（図表を用いてもよい）。

3-2-3. 地球中心核条件における純鉄の密度は、内核・外核の密度よりも約 5–10% 大きいことがわかっている。このことは地球中心核に鉄よりも軽い元素が含まれていることを示唆している。地球中心核を構成する軽元素として有力なものを 3 つあげ、その合理性を各軽元素について 3 行以内（合わせて 9 行以内）で答えよ。

3-2-4. 現在の地球中心核の温度はどのようにして推定することが出来るか、答えよ。また、その推定値の不確かさを生む原因についても記述せよ（合わせて 5 行以内）。

3-2-5. 過去の地球内部温度は現在よりも高く、液体の核は地球形成から現在までのある時期に固化を開始し、内核の成長が始まったと考えられる。内核の誕生前後では地球中心核のダイナミクスにどのような違いがあったと考えられるか、4 行以内で答えよ。

[4]

4-1. 化学反応の次数について、次の間に答えよ。ただし気体定数を R ($= 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$), $\ln 2 = 0.69$ とする。

4-1-1. 化合物 A を出発物質とする化学反応において、A の濃度[A]および反応速度 v が

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = k[A]^n$$

の関係にあるとき、この反応は A についての n 次反応と呼び、 k を反応速度定数といふ。初期濃度[A]₀として、一次反応が進行したとき、化合物 A の濃度[A]を時間 t の関数として表せ。

4-1-2. A についての二次反応において、A の濃度[A]が初期濃度[A]₀の半分になる時間を答えよ。

4-1-3. 次の表は、化合物 A を出発物質とする化学反応 1-4 を行い、A の濃度変化を計測した結果である。反応 1-4 のうち、一次反応であるものを二つ答えよ。またその二つの反応について、それぞれ反応速度定数を答えよ。

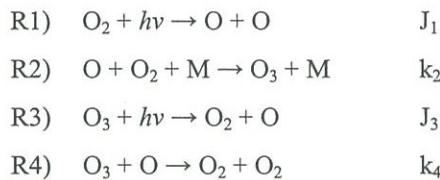
時間 [h]	反応 1		反応 2		反応 3		反応 4	
	濃度[A]	ln[A]	濃度[A]	ln[A]	濃度[A]	ln[A]	濃度[A]	ln[A]
0	1000	6.9	1000	6.9	1000	6.9	1000	6.9
2	760	6.6	48	3.9	449	6.1	202	5.3
4	520	6.3	24	3.2	202	5.3	41	3.7
6	280	5.6	16	2.8	91	4.5	8	2.1

4-1-4. 反応速度定数 k と絶対温度 T の関係を表すアレニウス式を書け。ただし、活性化エネルギーを E とせよ。

4-1-5. 設問 4-1-3 で選んだ二つの一次反応は、両者とも $A + B \rightarrow X$ で表される同種の化学反応であるが、反応の温度が異なっており、一方は 300 K、他方は 500 K の反応である。このとき反応 $A + B \rightarrow X$ の活性化エネルギー (kJ mol⁻¹) を求めよ。

4-2. 大気中でのオゾンの形成過程について、次の間に答えよ。

酸素(O_2) 20%と不活性な窒素(N_2) 80%からなる仮想的な大気に、太陽からの紫外線が照射されたとき、次の反応 R1-R4 が起きるとする。



ただし $h\nu$ は光子、M は反応の第三体を表す。J および k は、それぞれ各反応の光解離速度定数および反応速度定数である。また、化学種 X の数密度を $[X]$ で表す。

4-2-1. 上記 R1-R4 の反応が進行し、十分な時間が経った後に、酸素原子(O)とオゾン(O_3)の濃度が一定になったとする。この定常状態において、酸素原子とオゾンの数密度比 ($[O]/[O_3]$) を、 $[O_2]$ および $[M]$ の関数として書き表わせ。ただし、オゾン消費は主に R3 により進行し、R4 はそれと比較して無視できるほど遅いと仮定する。

4-2-2. 上記の定常状態でのオゾン数密度 $[O_3]$ を、 $[O_2]$ および $[M]$ の関数として表わせ。

4-2-3. ある高度における大気の数密度は 4×10^{17} molecules cm^{-3} 、光解離速度定数 J_1 、 J_3 はそれぞれ 2×10^{-9} molecules s^{-1} 、 8×10^{-3} molecules s^{-1} とする。また、速度定数比 k_2/k_4 は 10^{-19} である。この高度でのオゾンの体積混合率は何 ppmv になるか、答えよ。

4-2-4. 実際の大気中には水蒸気が存在しているため、R3 と R4 の反応以外に、オゾンを効率的に消費し、酸素分子に戻す反応過程がある。オゾンが酸素分子に戻る反応機構を 10 行以内で説明せよ。ただし、一連の化学反応式を示し、また反応における触媒の効果に関しても言及せよ。

筆答専門試験科目（午後）

29 大修

地球惑星科学系

時間 13:30 ~ 16:00

注意事項

- 1.以下の4問（5～8）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
- 2.解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってよい。
- 3.各解答用紙に必ず問題番号（5～8）及び受験番号を記入せよ。

[5]

次の文章を読んで以下の問い合わせに答えよ。ただし物理量は表1の値を用いること。
また、 $\ln 2 = 0.693$ 、 $\ln 5 = 1.61$ とする。

放射性核種とは、自発的に放射線を放出して崩壊し、他の原子核に変わる不安定な原子核、すなわち放射壊変を起こす原子核のことである。放射壊変で発生する放射線には α 線、 β 線、 γ 線などがあり、それぞれ α 壊変、 β 壊変、^[1] γ 壊変により放出される。また、^[2]自発核分裂とよばれる放射壊変も存在する。 β 壊変は β^+ 壊変、 β^- 壊変、および電子捕獲壊変に細分化される。

放射壊変は確率的な現象であり、ある時刻 t に存在する放射性核種の個数 N に比例して生じる。その比例定数（壊変定数）を λ とすると、

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (1)$$

が成立する。放射性核種を含む物質において、単位時間当たりに放射性核種が壊変する個数を、その物質の放射能（activity）と呼ぶ。つまり、式(1)の右辺は放射能を表している。一般に放射能の単位はベクレル（Bq）で表され、1秒間に放射性核種1個が壊変する場合に1Bqと定義される。

表1

アボガドロ数： 6.02×10^{23} mol ⁻¹
1年： 3.16×10^7 秒
^{238}U の壊変定数： 1.55×10^{-10} y ⁻¹
^{235}U の壊変定数： 9.85×10^{-10} y ⁻¹
^{234}U の壊変定数： 2.82×10^{-6} y ⁻¹

- 5-1. α 線および β 線はそれぞれある粒子から構成される。それらは何かを答えよ。 β 線については、 β^+ 壊変と β^- 壊変の違いにも言及せよ。
- 5-2. 下線部[1]および[2]にある γ 壊変および自発核分裂とは、それぞれどのような壊変様式か。あわせて5行以内で説明せよ。
- 5-3. ある時刻に存在する放射性核種の原子数が N_0 個のとき、放射壊変によってその数が半分($N_0/2$ 個)になる時間を半減期 $T_{1/2}$ という。式(1)を利用して、 λ を用いて $T_{1/2}$ を表せ。導出の過程も記述せよ。

- 5-4. ^{234}U の半減期を求めよ.
- 5-5. 設問 5-4 より, ^{234}U の半減期は地球の年齢（約 46 億年）に比べて極めて短いことが分かる。しかし、ウランを含有する天然物（花崗岩など）には ^{234}U も存在し、多くの場合、 ^{234}U の放射能は ^{238}U の放射能と等しい。その理由を 5 行以内で述べよ.
- 5-6. ある物質に含まれる ^{238}U および ^{234}U の放射能が等しいとき、その物質が持つ $^{238}\text{U}/^{234}\text{U}$ 比を求めよ.
- 5-7. ^{238}U と ^{234}U の放射能が等しくない地球上の代表的天然物にはどのようなものがあるか。その物質名、および放射能が等しくない理由を 3 行以内で述べよ.
- 5-8. ウラン含有量が $7.90 \times 10^{-6} \text{ g} \cdot \text{g}^{-1}$ である花崗岩 4.00 g について、ウランによる放射能は何 Bq か。ただし、花崗岩に含まれるウランの同位体は ^{238}U および ^{235}U のみとし、 $^{238}\text{U}/^{235}\text{U}$ 比を 1.00×10^2 とする。
- 5-9. 設問 5-8 の花崗岩は今から 10 億年前に形成されたとする。形成されたときの花崗岩に含まれていたウランの $^{238}\text{U}/^{235}\text{U}$ 比は現在の何倍であったか。必要であれば $e^{0.83} = 2.3$ を用いて良い。
- 5-10. 一般に、花崗岩にはジルコンのようなウラン濃度の高い副成分鉱物が含まれている。ジルコンはウランが鉛に放射壊変することを利用した年代測定（U-Pb 法）に適した鉱物とされている。ジルコンの鉱物的特徴に着目し、年代測定に適している理由を 3 行以内で述べよ.
- 5-11. 年代の古いジルコンには、鉱物の一部が可視光や X 線などに対して非晶質とみなされる状態になることがある。これをメタミクト化とよぶ。このようなメタミクト化はなぜ生じるのか、簡潔に述べよ.
- 5-12. メタミクト化が生じたジルコンを U-Pb 法で年代測定する場合、正しい年代が求められない可能性がある。その理由を 3 行以内で述べよ.

[6]

6-1. 次の文章を読み、以下の問い合わせに答えよ。

地球内部は球殻構造で近似でき、地表から中心に向かって、地殻・マントル・核に大別される。地殻とマントルの境界は（ア）とよばれ、そこでは地震波速度が約15%増加する。マントルは地球の体積の約82%、質量の約67%を占め、深さ約410–660 kmには、地震波速度や密度が段階的に大きくなる（イ）とよばれる領域が存在する。マントルでは深さ660 kmを境に構成鉱物が異なり、深さ660 kmまでを上部マントル、それ以深を下部マントルとよぶ。下部マントル最下部にはD''層とよばれる厚さ100–300 km程度の境界層があることもわかっている。深さ約2900 kmには核–マントル境界があり、下部マントルから核に入るとP波速度は減少し、密度は増加する。核–マントル境界は地震波速度や密度が地球内部で最も大きく変化する境界である。

6-1-1. 文中の（ア）、（イ）に入る最も適切な語句をそれぞれ答えよ。

6-1-2. 地殻は海洋地殻と大陸地殻に分けることができる。海洋地殻の厚さは5–7 km程度でほぼ一定あるのに対し、大陸地殻の厚さは30–60 kmと大きな幅を持つ。海洋地殻と大陸地殻の厚さに違いが生じる原因を、海洋地殻・大陸地殻それぞれの形成過程にも言及しながら、8行以内で述べよ。

6-1-3. 地殻とマントルの境界の深さは地震波観測によりどのように決定されるか、4行以内で説明せよ。図を用いてもよい。

6-1-4. マントルの粘性を観測データから推定する方法はいくつかある。例を1つ挙げ、その方法を3行以内で具体的に説明せよ。

6-1-5. D''層を構成していると考えられている鉱物名と、その化学組成を記せ。また、下部マントルとD''層の構造は地震学的にはどのように異なるか、3行以内で述べよ。

6-2. 次の文章を読み、以下の問い合わせに答えよ。

海洋プレートの温度構造を表すモデルの一つに半無限冷却モデルがある。半無限冷却モデルは、マントルポテンシャル温度 T_m のアセノスフェアがある時刻 ($t = 0$) に地表 ($z = 0$) に上昇し、時間の経過とともに表面から徐々に冷やされていくというモデルである。鉛直下方に z 軸正の向きを取り、水平方向への熱の拡散はないとして、プレートの温度 T は一次元熱伝導方程式にしたがい、その解は、初期条件 $T(z, 0) = T_m$ 、境界条件 $T(0, t) = T_0$ 、 $T(\infty, t) = T_m$ のもとで、

$$T(z, t) = T_0 + (T_m - T_0) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \quad (1)$$

となる。ここで、 κ は熱拡散係数、 t はアセノスフェアが地表に上昇してからの経過時間であり、誤差関数 (erf) は次の式で定義される。

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-x^2} dx \quad (2)$$

以下の問い合わせに答えよ。なお、 $T_0 = 273$ K、 $T_m = 1573$ K、 $\kappa = 1.0 \times 10^{-6}$ m²s⁻¹ とし、1年を365日とする。必要であれば以下の関係を用いてよい。 $\sqrt{365\pi} \sim 33.8$ 、 $\sqrt{365} \sim 19.1$ 、 $\sqrt{6} \sim 2.4$

6-2-1. マントルポテンシャル温度とは何か、簡潔に説明せよ。

6-2-2. 単位時間、単位面積当たりに地表に流れ出る熱量を熱流量といい、熱流量は地温勾配と熱伝導率の積であらわされる。プレートの温度が式 (1) で与えられるとき、プレート表面での熱流量 q_s を時間 t の関数として求めよ。ただし、熱伝導率を λ とする。

6-2-3. プレートの年代が 100 Myr のとき、プレート表面での熱流量を求めよ。ただし、熱伝導率は 4.0 Wm⁻¹K⁻¹ とする。

6-2-4. プレートの厚さ H を $T = 0.84T_m$ となる深さと定義するとき、 H を時間 t の関数として求めよ。その際、 $\operatorname{erf}(1) = 0.84$ を用いてよい。また、 $t = 100$ Myr のときの H を求めよ。

6-2-5. プレートが表面から冷やされると密度の大きい部分が厚くなり、アイソスタシーによりプレートは沈降する。半無限冷却モデルではプレートの沈降量は経過時間の 0.5 乗に比例し、古いプレートほど沈降量は大きくなる。しかしながら、実際の観測ではプレート年代が 100 Myr より古くなると海洋底の深さは 6 km 程度とほぼ一定になることが知られている。古い年代の海洋底の水深がほぼ一定になることを説明するモデルにはどのようなものがあるか。5行以内で説明しなさい。

[7]

7-1. 成分が実数である 2×2 行列 A について考える。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

7-1-1. 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

7-1-2. 行列 A^n を求めよ。ただし, n は自然数とする。

7-1-3. 行列 A^n の固有値と固有ベクトルを求めよ。

7-2. 正の実数 α に対し関数 $\Gamma(\alpha)$ を次のように定義する。

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

以下の間に答えよ。

7-2-1. 次の等式が成り立つことを示せ。ただし, k が正の実数のとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0$ となることを用いてよい。

$$(1) \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$(2) \text{自然数 } n \text{ に対して } \Gamma(n) = (n - 1)!$$

7-2-2.

$$(1) \text{自然数 } n \text{ に対して}$$

$$n! = n^{n+1} e^{-n} \int_0^\infty \exp[-n\{(\xi - 1) - \ln \xi\}] d\xi$$

が成り立つことを示せ。ただし, \ln は自然対数を表し, ξ は実数である。

(2) 関数 $g(\xi)$ を $g(\xi) = n\{(\xi - 1) - \ln \xi\}$ とおく。変数域 $\xi > 0$ において $g(\xi)$ は, $\xi = 1$ で極小値 0 をとり, $\xi = 1$ を除いて常に正であることを示せ。

(3) $\xi = 1$ の近傍における $g(\xi)$ のテイラー展開を, $\xi - 1$ の 3 次の項まで求めよ。

(4) $\xi = 1$ の近傍で $g(\xi)$ を $\xi - 1$ に関し 2 次までテイラー展開した近似を用いることにより, $n \gg 1$ のとき,

$$n! \simeq n^{n+1} e^{-n} \sqrt{\frac{2}{n}} \sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

と近似できることを示せ。

7-2-3. 統計学においてガンマ分布の確率密度関数は、 λ を正の実数として、次式で与えられる。

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

(1) x の期待値 E と分散 V を、 α と λ を用いて表せ。

(2) 正の実数である p, q に対し、次の関係が成り立つことを示せ。

$$\int_0^x f(t, p) f(x-t, q) dt = f(x, p+q)$$

必要に応じて、次の関係式を使ってもよい。

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p, q)$$

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

[8]

8-1. 無限に広い3次元 $x-y-z$ 空間内において、 $z < 0$ の領域が誘電率 ϵ 、透磁率 μ の媒質で満たされ、 $z > 0$ の領域が誘電率 $\epsilon'(\neq \epsilon)$ 、透磁率 $\mu'(\neq \mu)$ の媒質で満たされているとする。電磁波が $z < 0$ の領域から境界面 $z = 0$ に垂直に入射すると、一部が反射し、一部が $z > 0$ の領域へ透過する。ここで、 $\epsilon, \mu, \epsilon', \mu'$ は定数とし、考えている空間に電荷、電流はないとする。

一定の角振動数 ω をもつ直線偏光の電磁波を考え、電場ベクトルの振動面を $x-z$ 平面にする。このとき、 $z < 0$ および $z > 0$ の領域における電磁波の電場ベクトル E および磁束密度ベクトル B はそれぞれ、複素数表示で

$$z < 0 \text{ の領域} : \quad \begin{cases} E = \{E_1 \exp[i(kz - \omega t)] + E_2 \exp[-i(kz + \omega t)]\} e_x \\ B = \{B_1 \exp[i(kz - \omega t)] + B_2 \exp[-i(kz + \omega t)]\} e_y \end{cases} \quad (1)$$

$$z > 0 \text{ の領域} : \quad \begin{cases} E = E_3 \exp[i(k'z - \omega t)] e_x \\ B = B_3 \exp[i(k'z - \omega t)] e_y \end{cases} \quad (2)$$

と表される。ここで k および k' は正の定数で、 $E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3$ は複素定数である。 e_x, e_y はそれぞれ x 軸、 y 軸方向の単位ベクトルであり、 x, y, z 軸はこの順番で右手系をなすものとする。以下の間に答えよ。

8-1-1. 上の(1),(2)式では、「電磁波の電場ベクトル、磁束密度ベクトル、波の進行方向は互いに垂直である」という事実を使っている。このことを示すために、 $z > 0$ の領域のみを考え、この領域における電磁波を(2)式の代わりに

$$\begin{cases} E = E_3 \exp[i(k'z - \omega t)] e_x \\ B = (B_x e_x + B_y e_y + B_z e_z) \exp[i(k'z - \omega t)] \end{cases} \quad (2')$$

と表してみる。ここで B_x, B_y, B_z は複素定数で、 e_z は z 軸方向の単位ベクトルである。Maxwell方程式を用いて、(2')式が(2)式に帰着すること、すなわち、 $B_x = 0$ および $B_z = 0$ が成り立つことを示せ。

8-1-2. (2)式が $z > 0$ の領域におけるMaxwell方程式の解となるように、 k' および B_3 を、 $E_3, \omega, \epsilon', \mu'$ などの関数として決定せよ。

8-1-3. (1)式が $z < 0$ の領域におけるMaxwell方程式の解となるように、 k, B_1, B_2 を、 $E_1, E_2, \omega, \epsilon, \mu$ などの関数として決定せよ。

8-1-4. 媒質の境界面 $z = 0$ における電場および磁束密度の境界条件から、 E_1, E_2, E_3 の間に成り立つ式と、 B_1, B_2, B_3 の間に成り立つ式をそれぞれ導け。

8-1-5. 無次元量 m を $m = \sqrt{\epsilon' \mu / (\epsilon \mu')}$ で定義する。比 E_2/E_1 および E_3/E_1 を、 m のみの関数として決定せよ。

- 8-2. 内部が真空中で、内壁の温度 T が一定に保たれているような容器があるとする。この容器内の黒体放射（光子気体）について考える。

光子は、ボーズ・AINシュタイン統計に従うボーズ粒子であり、1粒子のエネルギーが ε であるような微視的状態を占有する光子の数の期待値は

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

と表される。ここで k はボルツマン定数である。光子は容器の壁面で自由に放射・吸収されるので、光子の化学ポテンシャルはゼロである。

光子のエネルギー ε 、運動量の大きさ p 、振動数 ν が、次の関係

$$\varepsilon = pc = h\nu$$

を満たすことに注意し、以下の間に答えよ。ただし、 c は光速、 h はプランク定数である。

- 8-2-1. 電磁波には独立な偏光状態が 2 つある。このことと不確定性原理を用いると、光子 1 粒子の運動を表す 6 次元位相空間において、体積 h^3 あたりに 2 つの微視的状態が存在する（ここで述べた「体積」とは、6 次元位相空間中での体積であることに注意）。容器の 3 次元的な体積を V としたとき、運動量の大きさが p から $p + dp$ （ただし dp は微小量）までの範囲に存在する微視的状態の数を求めよ。

- 8-2-2. この光子気体のうち、振動数が ν から $\nu + d\nu$ までの間にあるような光子の集団がもつエネルギー密度（容器中の単位体積あたりのエネルギー） $u_\nu d\nu$ が、

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

と書けることを示せ。

- 8-2-3. 光子気体のエネルギー密度 $u = \int_0^\infty u_\nu d\nu$ が、温度 T の何乗に比例するかを求めよ。