

卒業論文

原始惑星系円盤における
非線形オーム則を考慮したデッドゾーン

森 昇志

学籍番号 10B23813

東京工業大学

理学部地球惑星科学科

井田研究室

指導教員 井田 茂 教授

平成 26 年 2 月 7 日

概要

原始惑星系円盤は惑星が誕生する場所である。原始惑星系円盤において磁気乱流を起こす磁気回転不安定性 (MRI) は重要である。しかし、原始惑星系円盤は弱電離環境であるため、磁気乱流を維持できない領域 (デッドゾーン) が存在する。原始惑星系円盤における乱流は、ダストから微惑星に至るまで、その成長に影響を及ぼす。そのため、惑星形成を考える上では、いつ、どこに、どの程度の乱流が存在するか知らなければならない。

本論文では電子の電場加熱による電離度の減少に着目する。これまでの MRI の研究は、電子の温度は中性ガスの温度に等しいとしている。MRI による磁気乱流は強い電場を形成し、電子は電場によって加熱 (電場加熱) されうる。ダストを含む弱電離ガスは、電場加熱に伴い電離度が減少しうる (非線形オーム則)。電離度の減少は磁気乱流を安定化させるため、原始惑星系円盤における電場加熱の重要性を検討する必要がある。

本論文で、原始惑星系円盤における、MRI による電子の電場加熱とそれに伴う電離度減少が起きる領域を解析した。そのための過程を二段階に分け、研究を行った。第一段階として、電場加熱を考慮した詳細な数値計算を行うために、電子温度の近似的な導出を試みた。第二段階として、第一段階で示した式を用いて、電場加熱領域の位置を調べた。

以上を行い、2つの代表的な結果を示した。第一に、第一段階で導出した式は電場加熱による電離度の減少を十分再現することを示した。第二に、これまで持続的な磁気乱流が起きると考えられていた場所で、MRI の成長に伴う電場加熱が起き、結果として電気伝導度が減少することを発見した。数値計算の結果によれば、ダストサイズ $0.1\mu\text{m}$ 、ダストガス質量比 0.01 の最小質量円盤では、電場加熱が起きる領域が 20AU から 70AU まで広がる。この領域では、電場加熱に伴い電気伝導度が減少するため、激しい乱流は起きないことが示唆される。また、電場加熱によるダスト帯電により、ダスト同士の合体成長が阻害されることも示唆された。

本研究によって、原始惑星系円盤の MRI では、電場加熱が重要であることが示された。特に、微惑星形成に大きな影響を与えうる。本研究で示した諸公式を用いて詳細な数値計算を行うことで、定量的な影響が明らかになることが期待される。

目次

第 1 章	序論	5
第 2 章	背景	8
2.1	MRI	8
2.1.1	MRI とは	8
2.1.2	理想 MHD	9
2.1.3	MRI の導出	14
2.1.4	非理想 MHD 効果	22
2.2	デッドゾーン：Sano et al. (2000) について	23
2.2.1	デッドゾーンとは	23
2.2.2	局所 MRI 条件	24
2.2.3	計算モデル	24
2.2.4	結果	26
2.3	非線形オーム則：Okuzumi & Inutsuka (in prep) について	27
2.3.1	非線形オーム則とは	28
2.3.2	計算モデル	28
2.3.3	速度分布変化と電場加熱	30
2.3.4	解析的な電離反応計算手法	32
2.3.5	ダストの荷電粒子吸着速度係数	34
2.3.6	結果	36
第 3 章	本研究	38

3.1	非線形オーム則の簡潔な導出方法	38
3.1.1	電場加熱の導出	38
3.1.2	非線形オーム則の計算で用いる電離反応計算	44
3.1.3	ダストの荷電粒子吸着速度係数の導出	45
3.1.4	導出を変更した結果	46
3.2	非線形オーム則を考慮したデッドゾーン	48
3.2.1	計算モデル	48
3.2.2	基準モデルにおける結果	53
3.2.3	プラズマ β_c 依存性	55
3.2.4	ダスト密度依存性	57
3.2.5	非線形オーム則によるデッドゾーン半径の解析的な式	59
3.3	議論	62
3.3.1	電子の電場加熱によるダスト間の反発	62
3.3.2	電流密度から α を求める	65
3.3.3	MHD 計算手法の変更	67
第 4 章	結論と今後の課題	69
Appendix		73
A.1	cgs ガウス単位系と MKSA 単位系の違い	74
A.2	ダスト-荷電粒子衝突断面積	75
A.3	2 粒子の弾性衝突による運動量変化と運動エネルギー変化	77

第 1 章

序論

1995 年に Mayor & Queloz によって初の系外惑星が発見されて以来、多くの系外惑星が発見されている。2013 年 2 月 6 日時点で現在確認された系外惑星は 1075 個にもなる (<http://exoplanet.eu>)。それらの系外惑星は多様性に富んでおり、ホットジュピターと呼ばれる中心星に非常に近いガス型惑星や地球型惑星と呼ばれる地球に似た惑星などが発見されている。

惑星は原子惑星系円盤と呼ばれる、ガスとダストからなる円盤において形成される。古典的な惑星形成理論では、まず宇宙空間を漂う分子雲がある拍子に自己重力により収縮することで原始星が形成される。その後、原始星周りの原始惑星系円盤で、ダストが赤道面に沈殿し非常に薄いダストの層を作る。そして、ダスト密度の高い層で合体成長を繰り返すことで惑星は作られると考えられていた。しかし、そのようなダスト密度の高い層を形成出来る程、原始惑星系円盤が十分静的な状況であったかどうかは不明であった。

一方で、原始惑星系円盤は何らかの方法で初期に持っていた角運動量を失い、時間とともに中心星に降着してゆく。観測による原始惑星系円盤の存在確率から、そのように円盤が中心星へ降着しきるにはおよそ 10^6 年程度かかると考えられている。初期の角運動量を抜き去る方法は、何らかの機構で乱流が発生し、その乱流の実効的な粘性によるものだと考えられていた。しかし、乱流発生機構は明らかでなく、問題であった。

1998 年に Balbus & Hawley によって差動回転円盤において、磁気回転不安定性

(MRI) が発達すれば、その磁気応力によって大きな角運動量が輸送されうることが示唆された。

しかし、円盤が MRI により乱流状態になれば、従来のダスト密度の高い領域は存在しないと考えられるため、微惑星の形成が問題になる。そうすると原始惑星系円盤のどの領域で MRI が発達するのかが重要になってきた。Balbus & Hawley (1991) の研究は十分に磁場と中性ガスが結合した状況で電気伝導度を無限大の極限をとった理想的な状況を考えており、その後電気伝導度が有限の値を持つ非理想的な MRI についても研究が進められた。1996 年に Gammie が十分に磁場と中性ガスが結合した状況で電気伝導度が有限な MHD を考えれば、原始惑星系円盤の赤道面付近にデッドゾーンと呼ばれる MRI が起こらない領域があることを発見した。その後、2000 年に Sano et al. が具体的にデッドゾーンの領域を計算を行った。

非理想的な MHD の下で電気伝導度は、電流密度の流れやすさを決めるため、重要な物理量である。長い間、電気伝導度は慣習的に電場に依らないとされていた。しかし、Okuzumi & Inutsuka が原始惑星系円盤において電気伝導度が電場に依存しうることを発見した。これは、ある程度電場が強くなると電子が電場によって加熱され、中性ガスとは異なる温度をもつためである。この荷電粒子が電場によって加熱される現象を電場加熱と呼び、Inutsuka & Sano (2005) によって初めて原始惑星系円盤での応用が示された。従来の電気伝導度が電場に依らないという仮定は、電子の温度と中性ガスの温度が等しいという仮定から来ており、その仮定は低電場の極限において妥当である。しかし、原始惑星系円盤では MRI の成長に伴い電場も成長するために、電子の電場による加熱がおきると考えられる。従来の比例関係にあるオーム則に対し、この電流密度と電場の関係は非線形オーム則と呼ばれる。

これまで考えられてきた MRI は線形のオーム則であり、そのため非線形オーム則の重要性を検討する必要がある。

本論文の目的は、この非線形オーム則の応用をし、デッドゾーンの領域を新たに描きなおすことである。しかし非線形オーム則の計算には、無限級数で表される特殊関数を計算しなければならず、計算コストが高いために非線形オーム則の応用が困難であるという問題がある。そのため、本論文では、まず第一に、非線形オーム則を他の

問題に簡単に応用できるような導出方法を示す．その後，非線形オーム則を用いて従来のデッドゾーンを描きなおす．

本論文では，従来のデッドゾーンに対し，より広い領域で非線形オーム則が重要になり，非線形オーム則によるデッドゾーンが形成されることを示す．

本論文の構成は，まず第 2 章では本研究において重要な物理や先行研究を整理する．次の第 3 章で本研究に入る．

第 2 章

背景

この章では本研究に入る前に本研究において重要な物理および先行研究を整理する。本章は 3 つの節から成っている。2.1 節で本研究において背景的な現象である MRI の基礎的な内容を紹介する。2.2 節で Sano et al. (2000) で行った、デッドゾーンがどのような領域に存在するか具体的に計算した結果を紹介する。2.3 節で Okuzumi & Inutsuka (in prep) で行った、本論文において最も重要な関係である非線形オーム則を紹介する。

2.1 MRI

本節では MRI の基礎的な事項を整理する。本節を書くにあたって Chen (1977) および Johansen (2009) を参考にした。

2.1.1 MRI とは

MRI とは磁気回転不安定性 (Magnetorotational instability) のことで、磁場中の差動回転する流体におこる不安定性である。この不安定性は Velikhov (1959) によって発見され、Chandrasekhar (1961) の本にも載っている。原始惑星系円盤におけるその不安定性の重要性が認識されたのは Balbus & Hawley (1991) である。本論文では磁気回転不安定性は MRI と表記する。

原始惑星系円盤において MRI は円盤中の角運動量を円盤の外側へ輸送しながら発

達する。現在では初期の円盤の角運動量を抜き去る方法として最も有力な方法であると考えられている。

Balbus & Hawley (1991) では、ある一様な磁場中で、その磁場方向に軸対称な作動回転をする流体の理想 MHD を線形安定性解析することで MRI が現れることを示している。以下では、理想 MHD と MRI を理解する上で必要な式を整理してゆく。

2.1.2 理想 MHD

MHD とは磁気流体力学 (Magnetohydro dynamics) のことであり、流体の運動と磁場の進化を同時に解く。磁場中を運動する流体中の荷電粒子はローレンツ力を受け、その荷電粒子を通じて流体の中性粒子は力を受ける。そのように MHD は流体があたかも磁場から力を受けているとして扱う。また電流が流れるとその周りに磁場が発生し、その磁場によって流体自身は力を受ける。従って MHD は流体のと磁場の進化を同時に解くために、流体の方程式系と電磁気の方程式系の両方が基礎方程式となる。

電流の流れやすさを表す量に電気伝導度という物理量がある。一般には、電気伝導度は有限の値を持つが、電気伝導度を無限大にする極限での MHD を理想 MHD と呼ぶ。理想 MHD は MRI の線形安定性解析が簡単になることに加え、MRI の理解がしやすくなるため以下では理想 MHD について考える。

本論文では cgs ガウス単位系を用いる。単位系には cgs ガウス単位系に加えて MKSA 単位がよく用いられる。Appendix A.1 において cgs ガウス単位系と MKSA 単位系の違いをまとめた。本論文では電磁気を表記するにあたって E - B 対応を用いる。また磁束密度は単に磁場と表記する。

基礎方程式

原始惑星系円盤では、移流に比べ分子粘性は微小である。従って、流体を記述するには粘性を考慮しないオイラー方程式を使えば良い。流体にかかる力は重力と圧力勾配力のほかに電磁場から受ける力も加わる。電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ が存在するとき、流体要素の体積を V 、その体積中の荷電粒子 α ($\alpha =$ 電子 or 陽イオン) の電荷量を Q_α 、速

度を $\mathbf{u}_\alpha$ とすると、流体の単位体積あたりのローレンツ力は、

$$\begin{aligned}
F_{\text{Lorentz}} &= \frac{1}{V} \cdot \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B} \right) \\
&= \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B} \right) \\
&= \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

となる。ここで c は光速であり、 q_{α} と n_{α} はそれぞれ荷電粒子 α 1 個あたりの電荷量と荷電粒子 α の数密度である。 $\rho_e \equiv \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}$ と $\mathbf{J} \equiv q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}$ はそれぞれ単位体積あたりの電荷量と電流密度であるとする。

原始惑星系円盤は電氣的にほぼ中性であると考えられるので ρ_e は非常に小さい。そのため (2.1) の右辺 1 項目の電場による力は十分に無視できると考えられる。従って、MHD の運動方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{GM_*}{r^2} \mathbf{e}_R + \frac{1}{\rho c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \tag{2.2}$$

と書ける。ここで $\mathbf{u}$ は流体の速度、 P は流体の圧力、 ρ は流体の密度、右辺第二項は重力を表し、 $\mathbf{e}_R$ は中心星から位置 $\mathbf{R}$ に向けた単位ベクトルである。

質量保存を表す連続の式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \tag{2.3}$$

と書ける。

状態方程式は、等温変化を仮定すれば、等温変化の音速 c_s を使って、

$$P = c_s^2 \rho \tag{2.4}$$

と書ける。

MHD は流体の運動と同時に磁場の進化も解く。マクスウェル方程式の 1 つであるファラデーの式は磁場の時間発展を表し、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} \tag{2.5}$$

と書ける.

電場によって発生する電流密度はオームの法則によって記述される. オームの法則は流体と共に運動する系から記述され, 電場を $\mathbf{E}$, 電流密度を $\mathbf{J}$, 電気伝導度を σ_c とすれば,

$$\mathbf{J}' = \sigma_c \mathbf{E}' \quad (2.6)$$

と表される. ここで ' は流体と共に運動する系から見た量であることを表す. 電場に対しローレンツ変換を施せば, 流速が光速に比べ十分に遅い場合,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (2.7)$$

と書ける. また, 流体の速度が光速に比べ十分遅い場合は, 流体と同じ速度で動く系から見た電流密度 $\mathbf{J}'$ と静止座標系からみた電流密度 $\mathbf{J}$ は

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} \quad (2.8)$$

となる. 従って, これらを組み合わせれば,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma_c} - \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.9)$$

となる. ここで理想 MHD を考えれば $\sigma_c \rightarrow \infty$ なので, 結局

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.10)$$

となる. これは理想 MHD の誘導方程式と呼ばれ, 磁場の時間変化を表す.

電場と磁場を表すマクスウェル方程式はファラデーの式の他にガウスの式, 磁束保存の式, マクスウェル-アンペールの式があり, それぞれ

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_e \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.12)$$

$$4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.13)$$

と書ける．電場の時間変化が十分小さい時，変位電流は無視することができて，

$$4\pi \mathbf{J} = c \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.14)$$

と表される．これをアンペールの式と呼ぶ．通常，流体の運動が非相対論的であるときは，電場の時間変化は十分小さいとすることができる．以降は (2.13) の代わりに (2.14) を用いる．

以上をまとめると，理想 MHD の基礎方程式系は (2.2), (2.3), (2.4), (2.10), (2.14) で記述される．この方程式系は電場を陽に含まないが，電場はオームの法則を通じて電流と関係づいていることは注意すべきである．

電気伝導度

ここでは，オームの法則 (2.6) における電気伝導度 σ_c について詳しく見てゆく．

まず，中性ガス粒子静止系での電流密度は定義より，

$$\mathbf{J}' \equiv \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \langle \mathbf{v}_{\alpha} \rangle' \quad (2.15)$$

と表される． $\langle \mathbf{v}_{\alpha} \rangle'$ は荷電粒子 α の平均速度である．

次に， $\langle \mathbf{v}_{\alpha} \rangle'$ を求める．質量 m_{α} の荷電粒子は電場から力を受け，平均衝突時間 Δt_{α} の間に $\langle \mathbf{v}_{\alpha} \rangle'$ だけ加速されたとすると， $m_{\alpha} \langle \mathbf{v}_{\alpha} \rangle' / \Delta t_{\alpha} = q_{\alpha} \mathbf{E}'$ より，

$$\langle \mathbf{v}_{\alpha} \rangle' = \frac{q_{\alpha} \mathbf{E}' \Delta t_{\alpha}}{m_{\alpha}}, \quad (2.16)$$

となる．

(2.16) を (2.15) に代入すると，

$$\mathbf{J}' = \left(\sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2 n_{\alpha} \Delta t_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right) \mathbf{E}', \quad (2.17)$$

となる．この式の括弧の部分を実電導度 σ_c と呼ぶ．電気伝導度は荷電粒子の数密度 n_{α} が多いとき，流れる電気の量が増えるため電気伝導度は上がる．あるいは，荷電粒子の中性ガス粒子との平均衝突時間が長いとき，より速く運動できるため，電気伝導度は上がる．

電気伝導度を無限大の極限に取ることは、荷電粒子の量を増やし、中性ガス粒子の量を減らす極限に相当する。つまり、十分に電離しているとき、理想 MHD であると言える。

通常、オームの法則では電気伝導度を電場依存しないとして扱う。しかし、一般的に、電気伝導度一定は仮定である。Okuzumi & Inutsuka (in prep) はこの仮定を取り除いた上で、電場と電流密度の関係を調べた。これについては 2.3 節で詳しく扱う。

プラズマ β 値

(2.2) の磁場から受ける力をもう少し詳しく見てみる。ローレンツ力の $\mathbf{J}$ にアンペールの法則 (2.14) を用いれば、ローレンツ力は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{4\pi}((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{4\pi}((\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla\left(\frac{B^2}{2}\right))\end{aligned}\quad (2.18)$$

となる。第一項目は磁力線が曲げられた際にそれを元に戻そうとする力で、磁気張力と呼ばれる。第二項目は磁場の強さの勾配によって働く力であり、圧力と同じ形式のため、磁気圧と呼ばれる。磁場がどのくらい強いかを表す無次元数にプラズマ β 値というものがあり、ガス圧と磁気圧の比で表され、

$$\beta = \frac{8\pi P}{B^2}\quad (2.19)$$

と書ける。

アルフベン速度

流体の運動が磁気張力によって支配されている場合において、速度場がない ($\mathbf{u}_0 = 0$) 一様な磁場中 B_0 に速度の摂動 $\mathbf{u}_1$ を与え、磁場の 1 次の微小量 $\mathbf{B}_1$ の時間変化を考える。また非圧縮性流体であるとする。つまり流体の方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}_1\quad (2.20)$$

と表される, また, 理想 MHD の誘導方程式 (2.10) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) \\ &= (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1\end{aligned}\tag{2.21}$$

となる. (2.20) と (2.21) を連立させると,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_1}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{4\pi\rho} \nabla^2 \mathbf{B}_1\tag{2.22}$$

となる. これは $\mathbf{B}_1$ に関する波動方程式であり, 磁場の摂動は

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}}\tag{2.23}$$

という速さで伝わることを示している. この速度をアルフベン速度と呼ぶ.

2.1.3 MRI の導出

MRI は差動回転する円盤上で, 理想 MHD の基礎方程式系に対し線形安定性解析をすることで見るができる. 以下にそれを示す.

ここではケプラー回転をする円盤に z 方向一様な磁場が存在しているような状況を考える. したがって中心星から r 離れた点における角速度 Ω は

$$\Omega(r) = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}\tag{2.24}$$

となる. 円筒座標系 (r, ϕ, z) で流体の方程式 (2.2) を書き表すと,

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{u_\phi^2}{r} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{GM_*}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{1}{\rho c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_r\tag{2.25a}$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \frac{u_r u_\phi}{r} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\phi = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_\phi\tag{2.25b}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{GM_*}{r^2} \mathbf{e}_z + \frac{1}{\rho c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_z\tag{2.25c}$$

$$(2.25d)$$

となる.

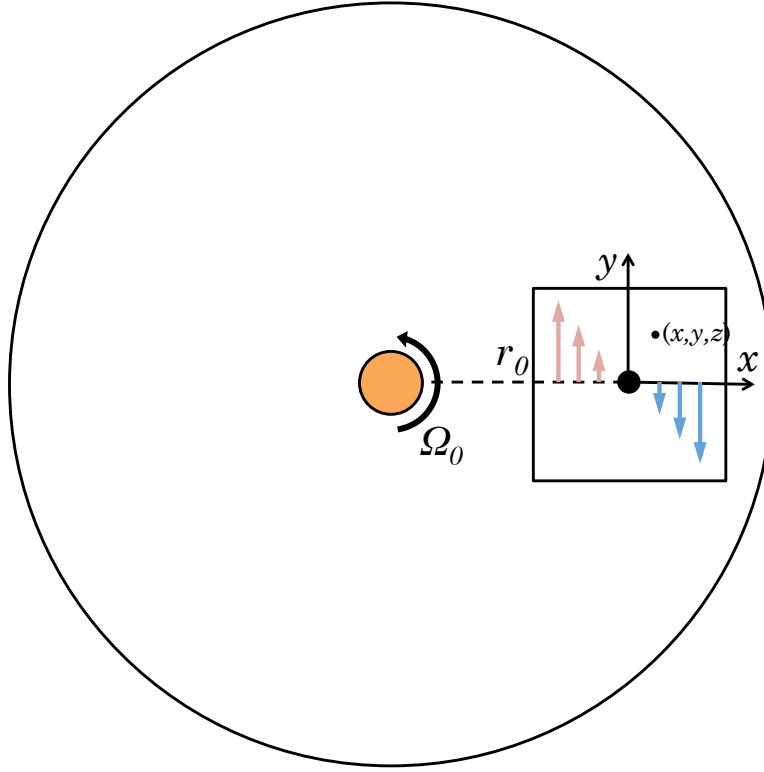


図 2.1 局所シアリングシート近似を表す概念図. 距離 r_0 だけ離れ, 角速度 $\Omega(r_0)$ で回転している点 (x, y, z) まわりの局所的な領域を見る. その領域内では物理量は z 方向には依存性を持つが, x, y 方向には依存性を持たないとする. 原点が $\Omega(r_0)$ で回転するために差動回転円盤では原点周りにせん断方向の風が吹く.

局所シアリングシート近似

MRI の線形安定性解析は適切な近似を幾つか置くことで, 簡潔な議論をする事ができる. MRI は原始惑星系円盤において局所的な不安定性である. 従って, 円盤とともに回転し, 近傍しか見ないような系をとることにする. 中心星から r_0 だけ離れ, $\Omega(r_0)$ で回転する点を原点に取る. そこから 図 2.1 のように動径方向に x 軸, 方位角方向に y 軸を取る. x, y は共に r_0 に比べ十分小さいとできる範囲を見る. 具体的に式で表せば,

$$x = r - r_0 \tag{2.26}$$

$$y = r_0(\phi - \Omega_0 t) \tag{2.27}$$

となる．ここで $\Omega_0 = \Omega(r_0)$ である．

局所近似を用いたときのケプラー回転による背景の速度場を知るために (2.26)(2.27) を時間 t に関して偏微分すると，点 (x, y, z) における x 方向の速度を u_x ， y 方向の速度を u_y とすれば，

$$u_x = u_r \quad (2.28)$$

$$u_y = r_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \Omega_0 \right) \quad (2.29)$$

となる．(2.29) で定常状態を考え ($\dot{\phi} = \Omega(r)$)， $x/r_0 \ll 1$ より x/r_0 の 2 次以上の項を無視すれば，定常状態の速度場は

$$u_{x,\text{stable}} = 0 \quad (2.30)$$

$$u_{y,\text{stable}} = -\frac{3}{2}\Omega_0 x \quad (2.31)$$

と書ける．

簡潔な議論のために重力の寄与は z 方向にはなく， r 方向のみにあると考える．また，局所近似を用いて 2 次以上の微小量を無視することで流体の方程式を簡単にする． r 方向の運動方程式の潮汐力は， $u_\phi = r \partial \phi / \partial t$ をもちいれば，

$$\begin{aligned} \frac{u_\phi^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} &= (r_0 + x) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{GM_*}{(r_0 + x)^2} \\ &= (r_0 + x) \left(\frac{u_y}{r_0} + \Omega_0 \right)^2 - \frac{GM_*}{r_0^2} \left(1 + \frac{x}{r_0} \right)^{-2} \\ &\approx r_0 \left(1 + \frac{x}{r_0} \right) \left(\Omega_0^2 + 2 \frac{u_y \Omega_0}{r_0} \right) - r_0 \Omega_0^2 \left(1 - 2 \frac{x}{r_0} \right) \\ &\approx 3\Omega_0^2 x + 2u_y \Omega_0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

となる．次に ϕ 方向の運動方程式の各項を書き換える．まず時間微分は，

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(r \left(\frac{u_y}{r_0} + \Omega_0 \right) \right) \\ &= \frac{u_x u_y}{r_0} + u_x \Omega_0 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial u_y}{\partial t} \\ &\approx u_x \Omega_0 + \frac{\partial u_y}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる。 $u_r u_\phi / r$ は,

$$\begin{aligned}\frac{u_r u_\phi}{r} &= u_x \left(\frac{u_y}{r_0} + \Omega_0 \right) \\ &\approx u_x \Omega_0\end{aligned}\tag{2.34}$$

となる。

よって、以上より、解くべき方程式系は、

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_x = 2\Omega_0 u_y + 3\Omega_0^2 x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_x \tag{2.35a}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_y = -2\Omega_0 u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_y \tag{2.35b}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_z \tag{2.35c}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \tag{2.35d}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \tag{2.35e}$$

となる。

MRI の線形安定性解析

これらの方程式系に対し、線形安定性解析を行うことで、摂動の時間進化を調べる。物理量は無摂動量と 1 次の微小量で表し、1 次の微小量についての方程式系に書き換える。無摂動量として磁場は z の方向のみが存在、速度場はケプラー回転によるシアー流が存在、密度および圧力は空間一様であるとする。従ってそれぞれ物理量は、

$$\mathbf{u} = -\frac{3}{2}\Omega_0 x \mathbf{e}_y + \mathbf{u}' \tag{2.36a}$$

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{B}' \tag{2.36b}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \tag{2.36c}$$

$$P = P_0 + P' \tag{2.36d}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4\pi c} \nabla \times \mathbf{B}' = \mathbf{J}' \tag{2.36e}$$

となる。

この方程式系は、2 次の微小量を無視することに注意すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_x}{\partial t} - \frac{3}{2}\Omega_0 x \frac{\partial u'_x}{\partial y} = & 2\Omega_0 u'_y \\ & - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 c} (\mathbf{J}' \times \mathbf{B}_0)_x \end{aligned} \quad (2.37a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_y}{\partial t} - \frac{3}{2}\Omega_0 x \frac{\partial u'_y}{\partial y} - \frac{3}{2}\Omega_0 u'_x = & -2\Omega_0 u'_x \\ & - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0 c} (\mathbf{J}' \times \mathbf{B}_0)_y \end{aligned} \quad (2.37b)$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} - \frac{3}{2}\Omega_0 x \frac{\partial u'_z}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0 c} (\mathbf{J}' \times \mathbf{B}_0)_z \quad (2.37c)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{3}{2}\Omega_0 x \frac{\partial \rho'}{\partial y} = -(\rho_0 + \rho') \nabla \cdot \mathbf{u}' \quad (2.37d)$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial t} - \frac{3}{2}\Omega_0 x \frac{\partial B'_x}{\partial y} = B_0 \frac{\partial u'_x}{\partial z} \quad (2.37e)$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial t} - \frac{3}{2}\Omega_0 x \frac{\partial B'_y}{\partial y} = B_0 \frac{\partial u'_y}{\partial z} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left(-\frac{3}{2}\Omega_0 x\right) \quad (2.37f)$$

$$\frac{\partial B'_z}{\partial t} - \frac{3}{2}\Omega_0 x \frac{\partial B'_z}{\partial y} = B_0 \frac{\partial u'_z}{\partial z} - B_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}') \quad (2.37g)$$

となる。

以下では簡潔な議論のために z 方向の不安定モードだけを調べるとする。つまり、 x, y 方向には摂動が起きないことを意味する。従って、1 次の摂動量がそれぞれ

$$q' \propto \exp[i(k_z z - \omega t)] \quad (2.38)$$

q' : ある摂動量

と書けるとして、ある波数 k_z の不安定性を調べる。

z 方向のモードだけ取り出すことにより、1 次の摂動量の x 微分と y 微分は 0 とな

る．ここでローレンツ力は，アンペールの式 (2.14) を使えば，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_0 c}(\mathbf{J}' \times \mathbf{B}_0) &= \frac{1}{\rho_0 c} \left(\left(\frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}' \right) \times \mathbf{B}_0 \right) \\
&= \frac{1}{4\pi \rho_0} ((\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}' - \nabla(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}')) \\
&= \frac{1}{4\pi \rho_0} \left(B_0 \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial z} - B_0 \frac{\partial B'_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

である．

以上を踏まえると上記の方程式系は

$$\frac{\partial u'_x}{\partial t} = 2\Omega_0 u'_y + \frac{B_0}{4\pi \rho_0} \frac{\partial B'_x}{\partial z} \tag{2.40a}$$

$$\frac{\partial u'_y}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Omega_0 u'_x + \frac{B_0}{4\pi \rho_0} \frac{\partial B'_y}{\partial z} \tag{2.40b}$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial z} \tag{2.40c}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u'_z}{\partial z} \tag{2.40d}$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u'_x}{\partial z} \tag{2.40e}$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u'_y}{\partial z} - \frac{3}{2}\Omega_0 B'_x \tag{2.40f}$$

$$\frac{\partial B'_z}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u'_z}{\partial z} - B_0 \frac{\partial u'_z}{\partial z} = 0 \tag{2.40g}$$

となる．(2.40g) は B'_z は時間進化しないことを示している．また，(2.40c) と (2.40d) は連立すれば波動方程式となり，また他の物理量に関係してこないので方程式系から外すと，結局，MRI は，

$$\frac{\partial u'_x}{\partial t} = 2\Omega_0 u'_y + \frac{B_0}{4\pi \rho_0} \frac{\partial B'_x}{\partial z} \tag{2.41a}$$

$$\frac{\partial u'_y}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Omega_0 u'_x + \frac{B_0}{4\pi \rho_0} \frac{\partial B'_y}{\partial z} \tag{2.41b}$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u'_x}{\partial z} \tag{2.41c}$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u'_y}{\partial z} - \frac{3}{2}\Omega_0 B'_x \tag{2.41d}$$

という形から導かれることを以下に見てゆく.

MRI の分散関係の導出

すると, (2.41) は,

$$i\omega u'_x + 2\Omega_0 u'_y + ik_z \frac{B_0}{4\pi\rho_0} B'_x = 0 \quad (2.42a)$$

$$i\omega u'_y - \frac{1}{2}\Omega_0 u'_x + ik_z \frac{B_0}{4\pi\rho_0} B'_y = 0 \quad (2.42b)$$

$$i\omega B'_x + ik_z B_0 u'_x = 0 \quad (2.42c)$$

$$i\omega B'_y + ik_z B_0 u'_y - \frac{3}{2}\Omega_0 B'_x = 0 \quad (2.42d)$$

となる, 従って,

$$\begin{pmatrix} i\omega & 2\Omega_0 & ik_z B_0/4\pi\rho_0 & 0 \\ -\Omega_0/2 & i\omega & 0 & ik_z B_0/4\pi\rho_0 \\ ik_z B_0 & 0 & i\omega & 0 \\ 0 & ik_z B_0 & -3\Omega_0/2 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ B'_x \\ B'_y \end{pmatrix} = 0 \quad (2.43)$$

を解けば良い. 自明な解 $u'_x = u'_y = B'_x = B'_y = 0$ を除けば, 各摂動量の波数 k_z が満たす分散関係は

$$\omega^4 - 2\omega^2(2v_A^2 k_z^2 + \Omega_0^2) + v_A^2 k_z^2(v_A^2 k_z^2 - 3\Omega_0^2) = 0 \quad (2.44)$$

となる. ここで v_A は (2.23) で定義したアルフベン速度である.

(2.44) を ω^2/Ω_0^2 の 2 次方程式とみなせば, 解くことができ,

$$\frac{\omega_{\pm}^2}{\Omega_0^2} = \frac{v_A^2 k_z^2}{\Omega_0^2} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{4 \frac{v_A^2 k_z^2}{\Omega_0^2} + \frac{1}{4}} \quad (2.45)$$

と書ける. ω^2 を k_z の関数としてプロットしたものが 図 2.2 になる. ω は (2.38) のように与えられるため, $\omega^2(k_z) < 0$ のとき k_z は不安定, $\omega^2(k_z) > 0$ のとき k_z は安定な波数と言える. $0 < k_z < \sqrt{3}\Omega_0/v_A$ で $\omega_-^2 < 0$ なので不安定である. $\sqrt{3}\Omega_0/v_A$ は MRI が起きる最大の波数である. これを波長 λ になおすと,

$$\lambda = 2\pi \frac{v_A}{\sqrt{3}\Omega_0} \quad (2.46)$$

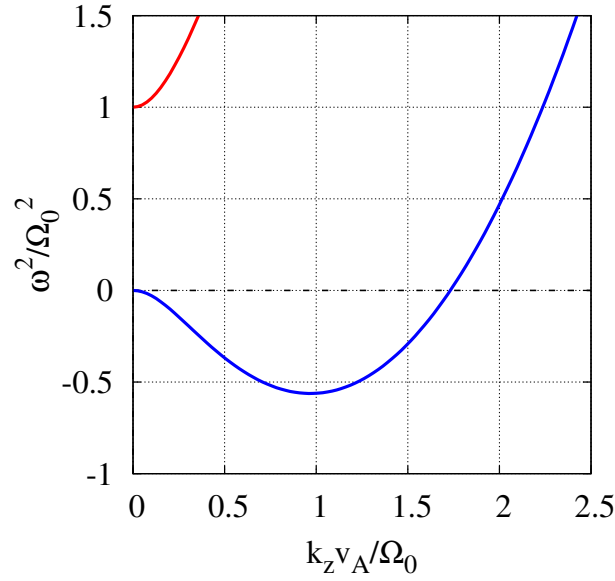


図 2.2 理想 MHD における MRI の分散関係．縦軸は摂動の周波数の 2 乗であり，横軸は摂動の波数を表しており，それぞれケプラー角速度の 2 乗と Ω_0/v_A で規格化している．青線は (2.45) の 2 解の内の ω_-^2/Ω_0^2 を描いた線であり，赤線は ω_+^2/Ω_0^2 を描いた線である． $\omega^2 < 0$ のとき不安定， $\omega^2 > 0$ のとき安定である．

となる．これは理想 MHD における MRI が起きる最小波長である．

理想 MHD における磁気回転不安定が最も速く成長する波長は $\min(\omega^2)$ を考えればよく， $k_z > 0$ という条件を課せば，

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{16}{15} \frac{v_A}{\Omega_0}} \quad (2.47)$$

のとき最大成長率

$$\text{Im}(\omega)_{\max} = \frac{3}{4} \Omega_0 \quad (2.48)$$

をとる．そのため，ケプラー回転をする MRI の代表的な成長タイムスケールはファクターを無視すれば $\sim 1/\Omega_0$ となる．これはつまり円盤を一周する間に不安定性が発達することを言っており，これは原始惑星系円盤における大局的な現象において比較的短いタイムスケールである．

ここまでは不安定波長 λ はガス密度のスケールハイト H 以内であるとしていた．しかし，実際にはガスの密度が十分薄い円盤上層部では MRI が発達しない．具体的に

は、最大成長波長 (2.47) がガス密度スケールハイト以内であれば MRI は起きる (Sano & Miyama, 1999). 理想 MHD の原始惑星系円盤において MRI がおこる条件は,

$$2\pi \frac{v_A}{\Omega_0} \lesssim H \quad (2.49)$$

となる.

以上が理想 MHD における議論である.

2.1.4 非理想 MHD 効果

理想 MHD というのは電気伝導度が無限大の極限であった. それに対し, 非理想 MHD というのは電気伝導度が有限の値を持つときの MHD である.

非理想 MHD の場合, 誘導方程式は (2.9) にアンペールの式 (2.14) と磁束保存の式 (2.12) を用いれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{c^2}{4\pi\sigma_c} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{c^2}{4\pi\sigma_c} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}) \\ &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.50)$$

ここで, $\mathbf{v}$ は中性ガスの速度, $\mathbf{B}$ は磁場, η は磁気拡散係数であり,

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma_c} \quad (2.51)$$

である. (2.50) の右辺第一項は理想 MHD の誘導方程式の右辺と同じである. これは, ガスによって磁場が曲げられるために, 磁場が成長することを表す. 右辺第二項は拡散を表す項である. 左辺とこの項だけ見れば, 拡散方程式の形をしている. つまりこの磁気拡散係数 η が大きいほど, 磁場はあまり成長しなくなることがわかる. (2.51) より, 電気伝導度 σ_c が小さいとき, η が大きくなるため, 磁場の拡散が効く. このように, 電気伝導度が小さいために磁場が発達しにくくなる現象をオーム散逸と呼ぶ.

(2.50) の第一項と第二項の大きさの比を取ることで, オーム散逸が支配的になる基準を表す無次元量を求めることができる. 長さ微分を $\sim \Omega/v_A$, 流速を $\sim v_A$ とす

れば,

$$R_{e,M} \equiv \frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{\eta \nabla^2 \mathbf{B}} \sim \frac{v_A^2}{\eta \Omega} \quad (2.52)$$

となる. この無次元量を磁気レイノルズ数 $R_{e,M}$ と呼ぶ. $R_{e,M} \gg 1$ のとき, (2.50) の第一項が支配的なので, オーム散逸は無視できる. 従って, 理想 MHD として近似できる. $R_{e,M} \ll 1$ のとき, (2.50) の第二項が支配的なので, オーム散逸は支配的である. 従って, 非理想 MHD として扱うべきである.

オーム散逸がおこる代表的な波数を見積もる. 磁気拡散係数 η の次元は $[L^2 T^{-1}]$ である. また, 速度の次元を持つ物理量にはアルフベン速度 v_A がある. よってオーム散逸のおこる代表的な波数は $\sim v_A/\eta$ と書ける. 次元を長さに変換すると $\sim 2\pi\eta/v_A$ と書ける. この長さスケールより短い長さ領域ではオーム散逸が効く. 原始惑星系円盤の長さのスケールとしてガス密度スケールハイト H をとると, オーム散逸が効く条件は,

$$2\pi\eta/v_A \gtrsim H \quad (2.53)$$

と表すことができる.

2.2 デッドゾーン：Sano et al. (2000) について

2.2.1 デッドゾーンとは

デッドゾーンとは原始惑星系円盤においてオーム散逸によって MRI が成長しない領域のことである. Gammie (1996) において, 磁気レイノルズ数が 1 を下回るような電離度の領域が円盤赤道面付近に存在するとして提唱された. その後デッドゾーンを解析的に計算したのが Sano et al. (2000) である.

原始惑星系円盤において, 磁気乱流は微惑星形成に大きな影響をおよぼす. また, 円盤の角運動量輸送機構としても重要である. そのためデッドゾーンの詳細を知ることとは重要である. この節では Sano et al. (2000) のレビューを行う.

2.2.2 局所 MRI 条件

円盤の不安定な領域を求めるためには、円盤の局所的な不安定条件で記述すると便利である。

円盤のある点で MRI が起きるには、理想 MHD で MRI が成長する条件 (2.49) を満たし、オーム散逸で MRI が成長しない条件 (2.53) を満たさなければ良い。よって、局所 MRI 条件は、

$$\text{unstable : } \begin{cases} 2\pi \frac{v_A(r, z)}{\Omega(r)} \lesssim H(r) & (2.54a) \\ \text{and} \\ 2\pi \frac{\eta(r, z)}{v_A(r, z)} \lesssim H(r) & (2.54b) \end{cases}$$

と表すことができる (Sano & Miyama, 1999) . ここでアルフベン速度 v_A は (2.23) より、 $v_A(r, z) = B(r)/\sqrt{4\pi\rho(r, z)}$ と書ける。

(2.54a) は解析的に式変形をすることができる。密度が低いために十分に磁場と結合しなくなるスケールハイト H_{ideal} は、ガス密度スケールハイト H を用いて、

$$H_{\text{ideal}} \equiv \sqrt{2 \log \frac{\beta_c}{8\pi^2}} H \quad (2.55)$$

と書ける。図 2.3 に H_{ideal}/H の β_c 依存性を表している。(2.55) より $\beta_c > 8\pi^2 \approx 79.0$ のとき H_{ideal} が存在する。つまり $\beta_c < 8\pi^2$ 以下のとき原始惑星系円盤の全領域で MRI は起きないことを意味する。

2.2.3 計算モデル

Sano et al. (2000) は以下の設定の下、計算を行った。

- 初期の円盤の状態から MRI が成長する領域を求めた。
- 局所 MRI 条件に (2.54) を用いた。
- 円盤は方位角方向一様である。
- 基準となる円盤の面密度は、最小質量円盤である。

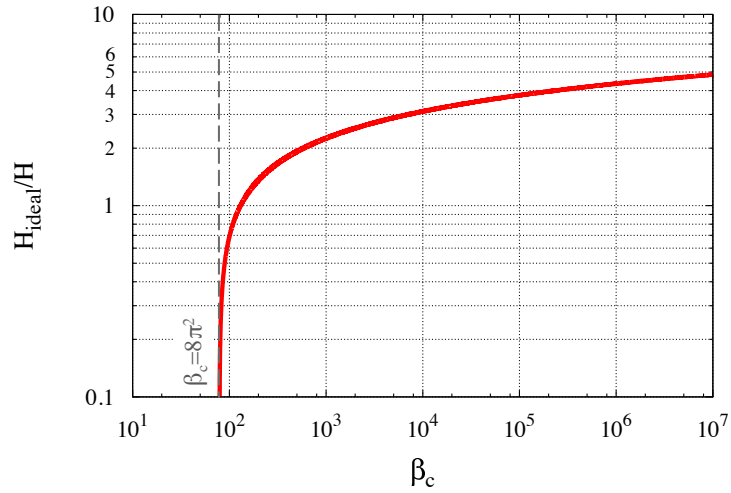


図 2.3 H_{ideal} と H の比の β_c 依存性. 縦軸が $H_{\text{ideal}}/H = \sqrt{2\log(\beta_c/8\pi^2)}$ であり, 横軸が β_c である. この関数は $\beta_c > 8\pi^2$ において存在する.

- 温度分布は光学的に薄い円盤の温度分布である.
- 音速は等温変化で伝わる.
- z 方向の密度分布は静水圧平衡から求める.
- ガス密度スケールハイトは $H = c_s/\sqrt{2}\Omega$ である.
- 磁場分布は赤道面でのプラズマベータ値 β_c を一定であるとして与えた.
- 電気伝導度は, 荷電粒子の数密度を平衡状態の電離反応計算によって求めた.
- 電子の温度は中性ガスの温度に等しい.
- 存在する粒子は電子, H^+ , He^+ , C^+ , H_2^+ , H_3^+ , 分子イオン m^+ , メタル M^+ とダストを考えた.
- 分子イオンは実際は様々な種類があるが, 種類に依らず性質はほぼ同じなので HCO^+ に代表させた. 同様にメタルも Mg^+ に代表させた.
- 中性分子を電離する源は銀河宇宙線である.
- 各粒子間の衝突速度係数は実験式を用いた.

計算順序としては, まず以上のモデルの下で円盤の構造を求める. その後, 円盤の各点 (r, z) において局所 MRI 条件 (2.54a) (2.54b) を判定する. そうすることで, デッドゾーンを考慮した MRI の成長する領域を求めることができる.

2.2.4 結果

原始惑星系円盤円盤における MRI が成長する領域を描いたものが図 2.4 である。縦縞の領域が不安定の起こる領域である。この図における λ_{res} , λ_{ideal} は局所 MRI 条件のガス密度スケールハイト H と比べられる長さである。それぞれ $2\pi\eta/v_A$, $2\pi v_A/\Omega(r)$ である。図左側の $\lambda_{\text{res}}/H = 1$ の内側の安定領域がデッドゾーンである。また、不安定領域上部の安定領域はガス密度が低いため、磁場と十分カップリングできずに安定となっている領域である。

このようにデッドゾーンは円盤の赤道面かつ内側の密度の高い領域に存在していることがわかる。それは MRI が起きるのに十分な電離源が円盤の赤道面付近まで届かないためである。

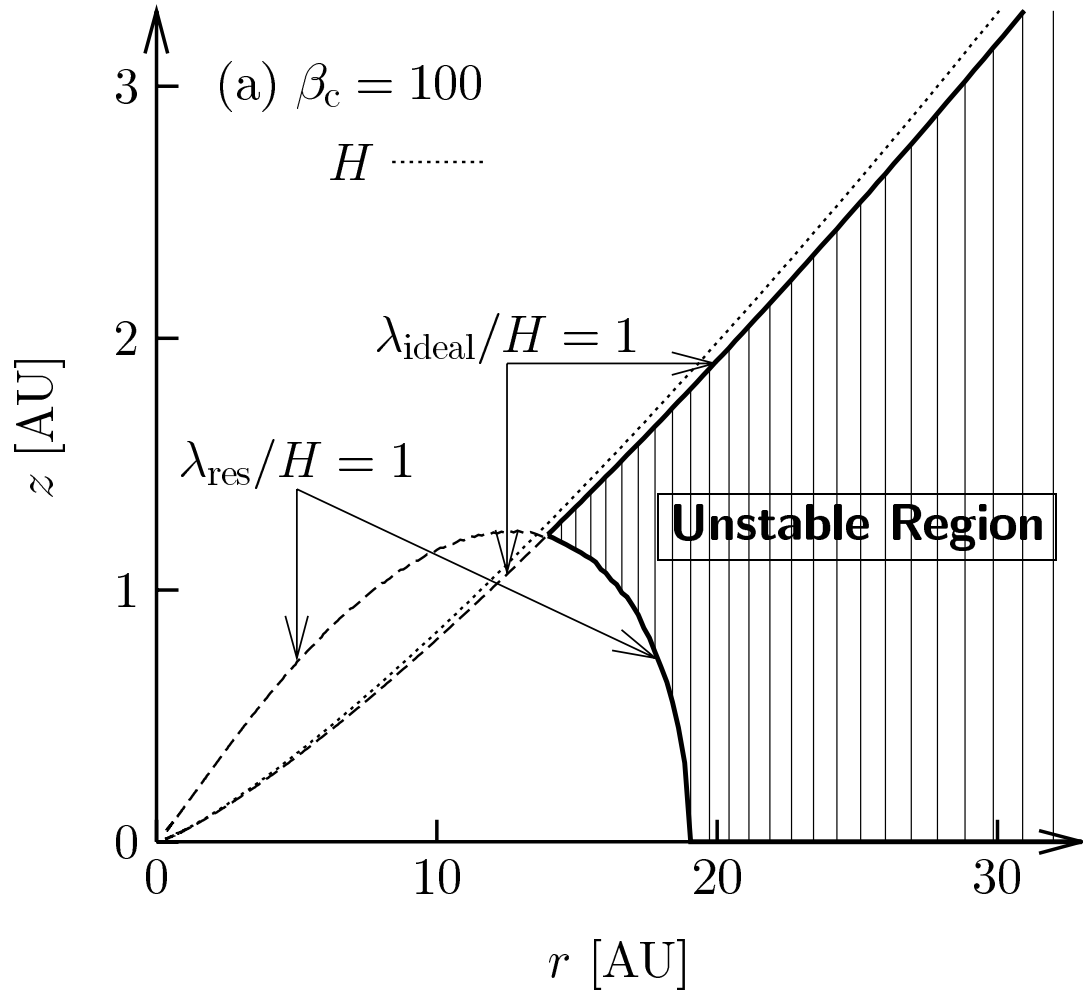


図 2.4 Sano et al. (2000) の原始惑星系円盤における不安領域。縦軸は円盤の赤道面からの距離 [AU] であり、横軸は中心星からの距離 [AU] を表している。縦縞の領域が MRI による不安定領域である。原点から伸びる点線は円盤のガス密度スケールハイトを表している。 $\lambda_{\text{ideal}}/H = 1$ の破線は理想 MHD における MRI 領域のスケールハイトを表している。本論文では λ は H_{ideal} に相当する。また $\lambda_{\text{res}}/H = 1$ の破線はデッドゾーンの境界をあらわしており、破線下側領域がデッドゾーンである。

2.3 非線形オーム則：Okuzumi & Inutsuka (in prep) について

非理想的な MHD の下で電気伝導度は重要な物理量である。これまで電気伝導度は電場に依存しないと考えられてきた。それは電子の温度と中性ガスの温度が等しいと

いう仮定の下で成り立つ。MRI の成長に伴う電場の上昇は非常に強い電場を形成する。そのため、電場による電子の加熱が無視できない可能性がある。この荷電粒子が電場によって加熱される現象を電場加熱と呼ぶ。Inutsuka & Sano (2005) によって初めて原始惑星系円盤での応用が示された。

その後、ダストを含む弱電離ガスでは、電子の電場加熱により、電気伝導度が電場に依存しうることが示された (Okuzumi & Inutsuka, in prep). この電場依存する電気伝導度を用いた電場と電流密度の関係を非線形オーム則と呼ぶ。本節では (Okuzumi & Inutsuka, in prep) のレビューを行う。

2.3.1 非線形オーム則とは

非線形オーム則の現象は定性的には以下のように説明できる。電場加熱により加熱された電子はより多くダストに吸着するようになるため、数密度は減少する。よって電場が高くなると電子速度は上がるが、流れる電気の総量は減る。以上の結果として、ある電場強度域においては、電場の上昇によって電気伝導度が下がるのである。

電場加熱は、電場から受ける仕事が熱エネルギー程度になると生じる。電子の電場加熱が起こる基準となる電場 E_{crit} はすでに知られており、

$$E_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{6m_e}{m_n}} \frac{k_B T}{el_e} \quad (2.56)$$

と書ける (Landau & Lifshitz, 1953). 中性ガスが H_2 のとき、電子と H_2 の衝突断面積は $\sigma_{en} \approx 10^{-15}$ となり (Frost & Phelps, 1962; Yoon et al., 2008), 中性ガス粒子の質量は $m_n = 2\text{amu}$ なので、電子の電場加熱が効く critical な電場の値は $E_{\text{crit}} \approx 1.2 \times 10^{-9} (T/100\text{K}) (n_n/10^{12}\text{cm}^{-3}) [\text{esu cm}^{-2}]$ と表すことができる。

2.3.2 計算モデル

Okuzumi & Inutsuka (in prep) は以下の設定の下、計算を行った。

- 弱電離なダストを含むガスにある電場が存在する。
- 陽イオンは HCO^+ の 1 種類に代表させる。陰イオンは原始惑星系円盤が還元

的なために存在しない。

- 電離反応には、高エネルギー粒子による中性ガスの電離、ダストへの吸着、気相中における荷電粒子同士の衝突による再結合を考えた。
- 電場の強さによって荷電粒子の速度分布が変化する。
- 荷電粒子はダストに衝突すると必ず吸着される。
- 再結合速度係数は電子と HCO^+ の衝突速度係数を使う。
- 電離速度には円盤上層部の希薄な領域での銀河宇宙線の代表的な値 10^{-17}s^{-1} を用いる。

電場が変化すると荷電粒子の速度分布も変化する。速度分布が変化することにより、荷電粒子の平均速度 $\langle v_\alpha \rangle$ と平均エネルギー $\langle \epsilon_\alpha \rangle$ は影響を受ける。また、荷電粒子のダストへの吸着しやすさも影響を受ける。電離反応の平衡状態が変わるため、荷電粒子の数密度とダストの帯電量も影響を受ける。電流密度は $J = \sum_{\alpha=e,i} q_\alpha n_\alpha \langle v_\alpha \rangle$ と定義される。そのため、電離反応から荷電粒子数密度 n_α を、速度分布から直接 v_α を計算することで電場と電流密度の関係を求めることができる。

計算順序は以下の通りである。

1. 電子および陽イオンの速度分布 f_i , f_e を計算する。
2. 速度分布を用いて電子および陽イオンの平均速度 $\langle v_e \rangle$, $\langle v_i \rangle$ を計算する。
3. 電子および陽イオンの数密度 n_e , n_i を電離反応計算から求める。
4. $J = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \langle v_\alpha \rangle$ より電場に対する電流密度の関係を求める。

また、Okuzumi & Inutsuka (in prep) では衝突電離と呼ばれる荷電粒子の衝突による中性ガス粒子の電離を考慮した場合の計算も行った。それによっても非線形な効果が現れることもわかっている。しかし、本論文では電流密度が減少する非線形性に着目するため詳しく扱わないとする。また衝突電離の効果は $E \sim 10^3 E_{\text{crit}}$ 程度で現れることもわかっている。そのため、 $E \lesssim 10^2 E_{\text{crit}}$ では衝突電離の影響はないと考えることができる。

2.3.3 速度分布変化と電場加熱

電流密度は平均速度 $\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle$ と荷電粒子の数密度 n_α によって求められる。また、荷電粒子のダストへの吸着しやすさは荷電粒子の平均エネルギー $\langle \epsilon_\alpha \rangle$ に依存している。そのため、ここでは荷電粒子の速度分布 f_e, f_i から平均速度と平均エネルギーを求める。ある速度分布に対する平均速度と平均エネルギーはそれぞれ、

$$\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle = \int \mathbf{v}_\alpha f_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 v_\alpha \quad (2.57)$$

$$\langle \epsilon_\alpha \rangle = \int \epsilon_\alpha f_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 v_\alpha \quad (2.58)$$

と定義される。ここで積分は速度空間における積分を表し、 $\epsilon_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2/2$ である。また、荷電粒子は並進運動が支配的とすれば、荷電粒子の温度は $\langle \epsilon_\alpha \rangle \equiv 3k_B T_\alpha/2$ と定義される。

電場が変化すると速度分布も変化する。平衡状態における弱電離ガス中の電子の速度分布は Davydov (1935) によって求められた。本論文ではその速度分布を $f_{e,D}(\mathbf{E}, \mathbf{v}_e)$ と書くことにする。Okuzumi & Inutsuka (in prep) ではその速度分布を用いる。具体的な式はここでは冗長さを避けるために省略する。 $E \approx 0$ のとき、 $f_{e,D}(\mathbf{E}, \mathbf{v}_e)$ はマクスウェル分布になる。 $E = 0$ と $E = 100E_{\text{crit}}$ の $f_{e,D}(\mathbf{E}, \mathbf{v}_e)$ のエネルギー依存性を表した図が 2.5 である。マクスウェル分布から $f_{e,D}(100\mathbf{E}_{\text{crit}}, \mathbf{v}_e)$ へと分布の頂点が移動したのは、電場加熱によって平均エネルギーが上昇したためである。

陽イオンの場合は電子のように一般的な電場において成り立つような速度分布は存在しない (Wannier, 1943)。しかし、陽イオンは電場が強くなると、平均運動エネルギーのうち熱的なランダム運動よりも電場によるドリフト運動の方が支配的になる。そのため、速度の詳しい分布は重要にならない。そのような理由から f_i はマクスウェル分布を平均速度分だけ平行移動したものとする (Hershey, 1939)。後の 3.1.1 で詳しく扱うが、陽イオンの平均速度と平均エネルギーは、陽イオンの平均衝突時間 Δt_i が一定であることから運動論的に求めることができる。

$f_{e,D}$ を用いて電子の平均速度および平均エネルギー計算する。また運動論的に陽イ

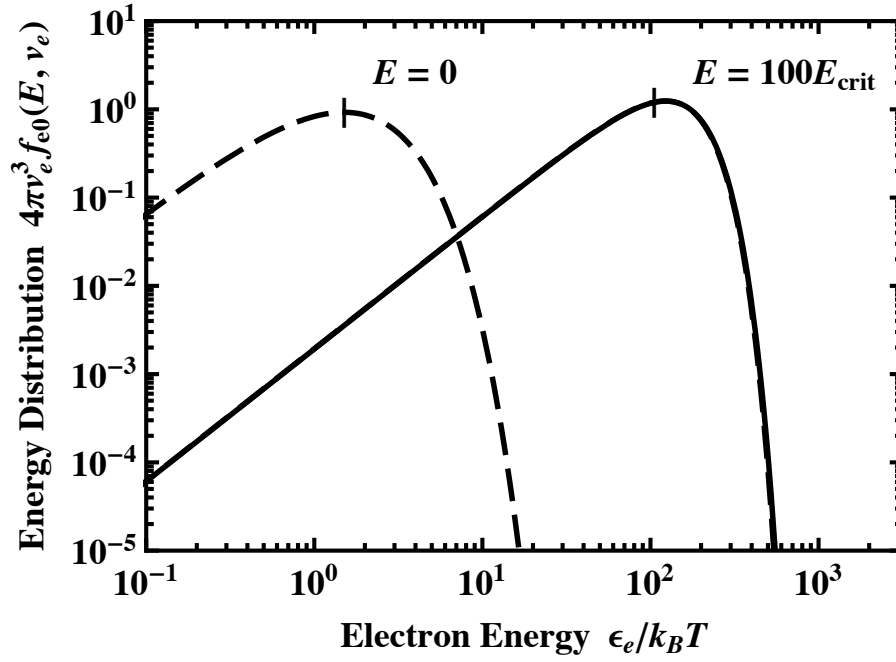


図 2.5 $f_{e,D}(E, v_e)$ を用いて電子のエネルギー分布の電場依存性を表した図. 破線が $f_{e,D}(0, v_e)$ を表しており, 実線が $f_{e,D}(100E_{\text{crit}}, v_e)$ を表している. $E = 0$ の破線 $f_{e,D}(0, v_e)$ はマクスウェル分布に等しい. 分布の頂点付近にある印はそれぞれの分布の平均エネルギーである.

オンの平均速度および平均エネルギーを求める. すると,

$$\langle v_e \rangle = \frac{\Gamma(1 + \xi, \xi) \exp \xi}{\xi^{3/2 + \xi} U(3/2, 5/2 + \xi, \xi)} \frac{eEl_e}{3k_B T} \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_e}} \quad (2.59)$$

$$\langle \epsilon_e \rangle = \frac{\xi U(3/2, 5/2 + \xi, \xi)}{U(3/2, 7/2 + \xi, \xi)} \frac{3k_B T}{2} \quad (2.60)$$

$$\langle v_i \rangle = \frac{m_i + m_n}{m_i m_n} eE \Delta t_i \quad (2.61)$$

$$\langle \epsilon_i \rangle = \frac{3}{2} k_B T + \frac{1}{2} (m_i + m_n) \langle v_i \rangle^2 \quad (2.62)$$

となる. ここで $\xi \equiv (E/E_{\text{crit}})^2$, $\Gamma(x, z)$ は不完全ガンマ関数で $\Gamma(x, z) \equiv \int_z^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt$, $U(a, b, c)$ は第二種合流型超幾何関数で $U \equiv (\int_0^\infty t^{a-1} (1+t)^{b-c-1} \exp(-ct) dt) / \Gamma(a)$ である. また $\Gamma(x)$ はガンマ関数で $\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt$ である.

これらの電子と陽イオンの平均エネルギーの電場依存性をそれぞれ描いたものが

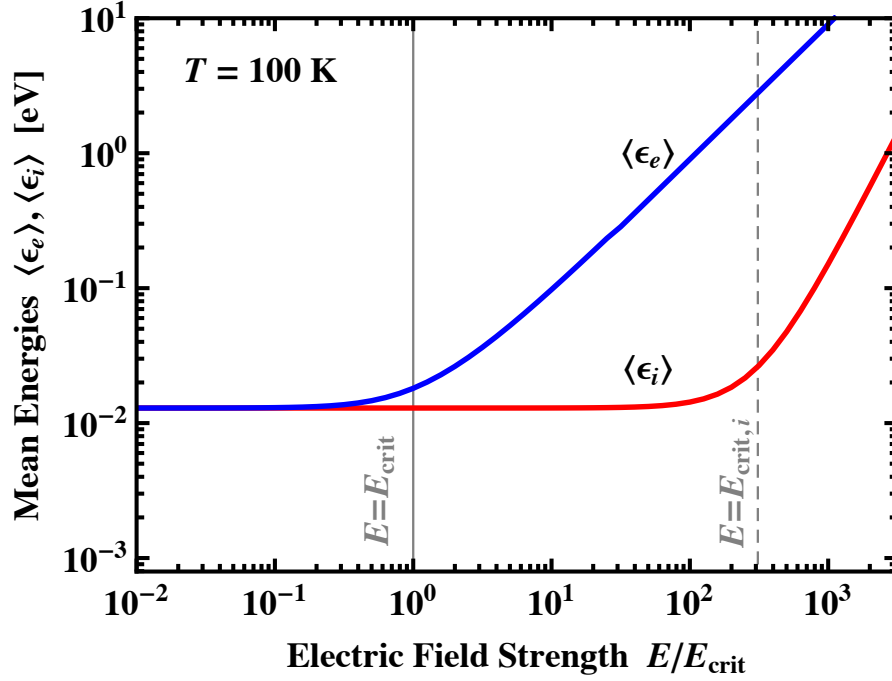


図 2.6 中性ガス温度が 100K での荷電粒子の電場加熱を表す図。縦軸は荷電粒子の平均エネルギーをあらわしており、横軸は E_{crit} で規格化された電場を表している。青線は電子の、赤線が陽イオンの電場加熱を表す。 E_{crit} と $E_{\text{crit},i}$ はそれぞれ電子の電場加熱が効く電場と陽イオンの電場加熱が効く電場を表している。

図 2.6 である。この図では中性ガス温度を 100K としている。電子の平均エネルギーは $E \lesssim E_{\text{crit}}$ では一定で、値は中性ガス粒子の平均エネルギーとほぼ同じである。 $E > E_{\text{crit}}$ では傾きがおよそ 1 で上昇している。陽イオンの電場加熱が支配的になる電場を $E_{\text{crit},i}$ と表す。陽イオンも同様に $E \lesssim E_{\text{crit},i}$ では中性ガスの平均エネルギーとほぼ同じである。 $E > E_{\text{crit},i}$ では傾きがおよそ 2 で上昇している。このように電場が基準となる電場より大きくなると電場加熱が効いてくる。

2.3.4 解析的な電離反応計算手法

電離反応方程式とは、ある電離した粒子の様々な反応による数密度の時間変化を表したものである。Okuzumi & Inutsuka (in prep) では Okuzumi et al. (2009) によって示された解析的に平衡状態の電離反応方程式を解く方法を用いた。電離反応を解くには、厳密には、考える全ての種類の粒子を考えなければならない。また、ダスト

の帯電する電荷数やサイズ分布ごとに方程式を立てるべきである。しかし、それらの違いが重要でない状況では各粒子の平均的な振る舞いを見ることで、本質的な議論をすることができる。Okuzumi et al. (2009) ではダストの帯電量と半径は全ダストでの平均値を用いた。また、陽イオンは1種類に代表させることで平衡状態における数密度を解析的に求める。以下に詳しく見てゆく。

中性ガスの数密度 n_n のダストを含むガスにおける数密度 n_e の電子、数密度 n_i の陽イオン、数密度 n_d ダストの電離反応方程式は、

$$\frac{dn_i}{dt} = \zeta n_n - K_{\text{rec}} n_i n_e - K_{di} n_d n_i \quad (2.63a)$$

$$\frac{dn_e}{dt} = \zeta n_n - K_{\text{rec}} n_i n_e - K_{de} n_d n_e \quad (2.63b)$$

$$\frac{dn_d Z}{dt} = K_{di} n_d n_i - K_{de} n_d n_e \quad (2.63c)$$

と表される。ここで $\zeta, K_{\text{rec}}, K_{d\alpha}, Z$ はそれぞれ、電離速度、気相における再結合速度係数、荷電粒子のダスト吸着速度係数、ダスト1個あたりの平均帯電電荷数を表す。(2.63a),(2.63b) の第一項は中性ガスがある電離源により電離し荷電粒子が増加することを表す。同二式の第二項は気相中における再結合により荷電粒子が減少することを表す。再結合とは、正電荷を持つ荷電粒子と負電荷を持つ荷電粒子が衝突し中性粒子になることである。第三項は荷電粒子がダストに吸着され減少することを表す。平衡状態は上の方程式の時間微分を0にした方程式を解くことで求められる。つまり、 n_i, n_e, Z は中性ガスの電離、荷電粒子同士の再結合、荷電粒子のダストへの吸着の3つの現象が釣り合う状況から求められる。

ここで、(2.63a), (2.63b), および (2.63c) を用いて積分すると

$$Z n_d + n_i - n_e = 0 \quad (2.64)$$

となる。ここで系の総電離量を0とした。これは総電荷量が保存することを表している。3本の方程式から導かれたものであるので、(2.63c) の代わりにこの式を用いることにする。

以下では定常状態を仮定して電離反応方程式を解く。時間微分を0とすれば、

(2.63) は

$$0 = \zeta n_n - K_{\text{rec}} n_i n_e - K_{di} n_d n_i \quad (2.65a)$$

$$0 = \zeta n_n - K_{\text{rec}} n_i n_e - K_{de} n_d n_e \quad (2.65b)$$

$$0 = Z n_d + n_i - n_e \quad (2.64)$$

となる。この (2.65a)(2.65b) には 2 次方程式の解の公式が使えるため、数密度が以下のように解析的に求められる。

$$n_{\alpha}^{(\text{eq})} = \frac{\zeta n_n}{K_{d\alpha} n_d} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{K_{\text{rec}} \zeta n_n}{K_{di} K_{de} n_d^2}} \right)^{-1} \quad (2.66)$$

上付き添字 (eq) はこの値が解析解であることを表している。括弧内の $K_{\text{rec}} \zeta n_n / (K_{di} K_{de} n_d^2)$ は電離反応が何によって平衡状態であるかを表す。ダスト吸着と中性ガスの電離による平衡状態では、この値は 1 より十分小さくなる。そのため $n \approx \zeta n_n / K_{d\alpha} n_d$ とできる。電子と陽イオンの再結合と中性ガスの電離による平衡状態では、この値は 1 より大きくなる。

Z は (2.66) を使って (2.64) より、

$$Z^{(\text{eq})} = \frac{1}{n_d} \left(n_e^{(\text{eq})} - n_i^{(\text{eq})} \right) \quad (2.67)$$

と書くことができる。以上より (2.66) と (2.67) を用いれば、荷電粒子の数密度とダストの帯電電荷数が解析的に求めることができる。

2.3.5 ダストの荷電粒子吸着速度係数

電離反応方程式において $K_{d\alpha}$ は荷電粒子のダストへの吸着しやすさを表す。ある相対速度の荷電粒子とダストとの衝突断面積 $\sigma_{d\alpha}(v_{d\alpha}, Z)$ は、力学的な問題を考えることで与えられる (Appendix A.2 ; Spitzer (1941))。吸着速度係数は衝突断面積と相対速度の積の平均値として表される。つまり

$$K_{d\alpha} = S_{\alpha} \int \sigma_{d\alpha}(v_{d\alpha}) v_{d\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}) d^3 v_{\alpha} \quad (2.68)$$

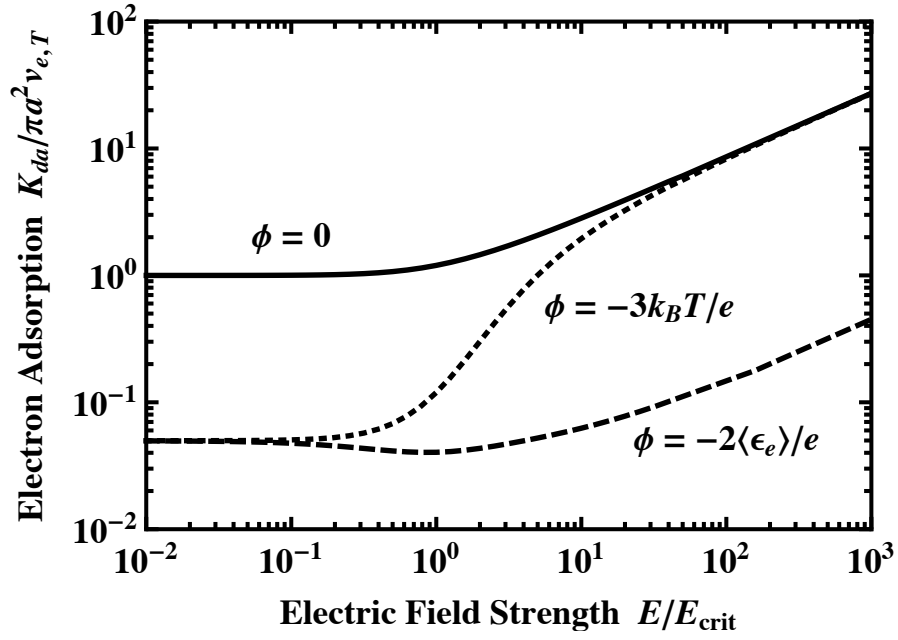


図 2.7 (2.69)における $F(\xi, \Psi)$ の電場依存性を表している. $\phi = 0$, $\phi = -3k_B T/e$, $\phi = -2\langle\epsilon_e\rangle/e$ についてプロットしている.

となる. ここで S_α は荷電粒子 α が衝突した時に吸着される確率である. Okuzumi & Inutsuka (in prep) では荷電粒子がダストに衝突すると必ず吸着されるとしているため $S_\alpha = 1$ である.

K_{de} と K_{di} を 2.3.3 項と同様の速度分布で計算を行うと,

$$K_{de} = \pi a^2 \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_e}} F(\xi, \Psi) \quad (2.69)$$

$$F(\xi, \Psi) \equiv \frac{(\Psi + \xi)^{1+\xi} e^{-\Psi} + (1 - \Psi) \Gamma(1 + \xi, \Psi + \xi) e^\xi}{\xi^{3/2+\xi} U(3/2, 5/2 + \xi, \xi)}$$

$$K_{di} = \pi a^2 \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_i}} G(\theta, \Psi) \quad (2.70)$$

$$G(\theta, \Psi) \equiv \frac{\sqrt{\theta}}{2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\theta}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(u + \frac{\theta + 2\Psi}{u}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2\theta}}\right)$$

となる. ここで $\theta \equiv T_i/T$, $u^2 = 3(\theta - 1)m_i/m_n$, $\Psi \equiv -e\phi/k_B T$ である. また, $\operatorname{erf}(x)$ は誤差関数で $\operatorname{erf}(x) \equiv (2/\sqrt{\pi}) \cdot \int_0^x \exp(-t^2) dt$ である.

図 2.7 は K_{de} の電場依存を表した図である. ϕ の値を変えてそれぞれプロットして

いるが、傾向として $E = E_{\text{crit}}$ を境に K_{de} は上昇している。これは電場加熱によってダストと電子が衝突しやすくなったと言える。また、陽イオンについても同様の傾向である。

2.3.6 結果

以上を用いて電離度の電場依存性を計算したのが図 2.8 である。電場加熱によって電子の数密度が大きく減少している。

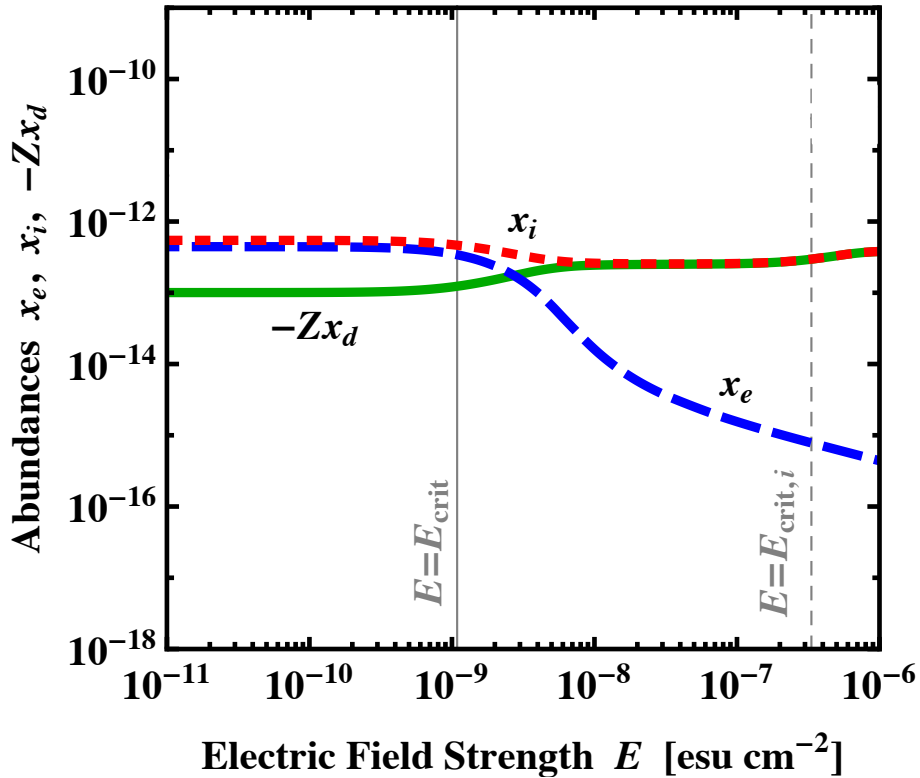


図 2.8 荷電粒子の数密度比の電場依存性。縦軸は中性ガス粒子に対する存在度，横軸は電場 $[\text{esu cm}^{-2}]$ 赤色の破線は陽イオンの電離度 $x_i = n_i/n_e$ ，青色の破線は電子の電離度 $x_e = n_i/n_n$ ，緑色の実線は単位体積あたりのダストの平均帯電電荷数を中性ガス粒子の数密度で割ったものである。 E_{crit} と $E_{\text{crit},i}$ はそれぞれ電子の電場加熱が効く電場と陽イオンの電場加熱が効く電場を表している。

荷電粒子の数密度の電場依存性が分かったので、あとは (2.59) と (2.61) を用いることで非線形オーム則を導くことができる。図 2.9 に非線形オーム則を示す。低電場域 ($E \ll E_{\text{crit}}$) では電流密度 $\mathbf{J}$ は電場に対し線形である。しかし $E = E_{\text{crit}}$ 付近で電流

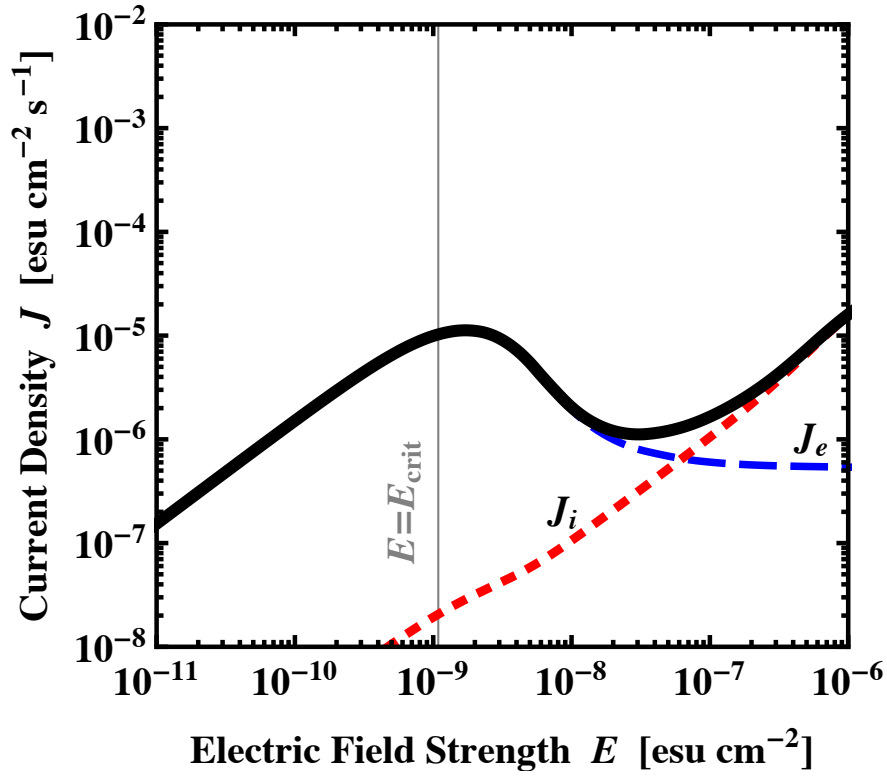


図 2.9 Okuzumi & Inutsuka (in prep) の非線形オーム則. 黒色の実線は電子の移動による電流密度と陽イオンの移動による電流密度を足しあわせたもので、実効的な電流密度である. また青線の破線は電子の電流密度, 赤色の破線は陽イオンの電流密度を表す. ダストとガスの密度比 f_{dg} は 0.01, 電離速度 ζ は 10^{-17} , 中性ガスの温度 T は 100K, 中性ガスの数密度 n_n は 10^{12}cm^{-3} , ダスト半径は $1\mu\text{m}$, ダストの物質密度 $\rho_{\bullet}$ は 2g cm^{-3} である.

密度と電場の線形関係は崩れる. 電場が $E > E_{\text{crit}}$ となると電流密度が下がる. これは, 電子のダスト吸着速度係数 K_{de} が増加したためである.

第 3 章

本研究

まず 3.1 節で, MRI の詳細な数値計算に適用しやすい形で非線形オーム則の方程式系を示す. 次に 3.2 節で非線形オーム則を考慮して描いたデッドゾーンの結果を示す. 3.3 節でこれらの結果を踏まえて議論を行う. 4 節でまとめる.

3.1 非線形オーム則の簡潔な導出方法

Okuzumi & Inutsuka (in prep) において荷電粒子の平均速度 $\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle$, 平均エネルギー $\langle \epsilon_\alpha \rangle$, ダスト吸着速度係数 $K_{d\alpha}$ は速度分布を考慮した平均で表されている. しかし, それぞれ無限級数で表される特殊関数を含むために, 計算コストがかかる. また, 計算途中で非常に大きい値を用いるため, 数値発散する恐れがある. そのため実際に非線形オーム則を応用するにあたっては同様の手法を用いることは技術的な困難がある. この節では, 厳密な速度分布を用いずに導出することを試みる.

まず電場加熱に関しては, 荷電粒子の荷電粒子の運動論を考えることで平均エネルギー $\langle \epsilon_\alpha \rangle$ と平均速度 $\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle$ を導く. 次に, ダスト吸着速度係数に関しては, 荷電粒子の速度分布としてマクスウェル分布を用いることで導く.

3.1.1 電場加熱の導出

まず, ある一粒子の荷電粒子の運動を考える. その後, 荷電粒子全体の振る舞いとしての運動を考える. 以下の議論は中性粒子静止系から見た議論を行う.

まず一様電場中 $\mathbf{E}$ における質量 m_α 、数密度 n_α の荷電粒子 1 個について運動方程式を考える。荷電粒子に働く力は電場によるクーロン力の他に、中性ガスとの衝突による運動量変化率がある。ある速度 v_α をもった荷電粒子が中性ガスに衝突するまでの平均的な時間を Δt_α 、衝突前後の速度変化を $\Delta \mathbf{v}_\alpha$ とする。また、中性ガスとの衝突による運動量の増減を $m_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha / \Delta t_\alpha$ と表すことにする。すると、荷電粒子の運動方程式は

$$m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = q_\alpha \mathbf{E} + m_\alpha \frac{\Delta \mathbf{v}_\alpha}{\Delta t_\alpha} \quad (3.1)$$

と書ける。 Δt_α は平均衝突時間とよばれる。

衝突前後のエネルギー変化を $\Delta \epsilon_\alpha$ とし、中性ガスとの衝突によるのエネルギーの変化率を $m_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha / \Delta t_\alpha$ とする。すると、エネルギー変化率は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \right) = q_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\alpha + \frac{\Delta \epsilon_\alpha}{\Delta t_\alpha} \quad (3.2)$$

と書ける。

今我々は定常状態の荷電粒子の平均的な振る舞いを知りたい。従って、速度の時間微分を 0 にする。また、(3.1) と (3.2) を同種の荷電粒子に関して平均をとる。すると、

$$0 = q_\alpha \mathbf{E} + m_\alpha \left\langle \left\langle \frac{\Delta \mathbf{v}_\alpha}{\Delta t_\alpha} \right\rangle_\alpha \right\rangle_n \quad (3.3)$$

$$0 = q_\alpha \mathbf{E} \cdot \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle_\alpha + \left\langle \left\langle \frac{\Delta \epsilon_\alpha}{\Delta t_\alpha} \right\rangle_\alpha \right\rangle_n \quad (3.4)$$

となる。 $\langle \rangle$ の下付き添字はその粒子に関して平均を取ること意味している。(3.3) と (3.4) の第二項は Δt_α が荷電粒子の速度 $\mathbf{v}_\alpha$ に依らないとすれば、

$$m_\alpha \left\langle \left\langle \frac{\Delta \mathbf{v}_\alpha}{\Delta t_\alpha} \right\rangle_\alpha \right\rangle_n = \frac{m_\alpha}{\Delta t_\alpha} \langle \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle_\alpha \rangle_n \quad (3.5)$$

$$\left\langle \left\langle \frac{\Delta \epsilon_\alpha}{\Delta t_\alpha} \right\rangle_\alpha \right\rangle_n = \frac{1}{\Delta t_\alpha} \langle \langle \Delta \epsilon_\alpha \rangle_\alpha \rangle_n \quad (3.6)$$

とすることができる。この $\Delta \mathbf{v}_\alpha$ と $\Delta \epsilon_\alpha$ は 2 粒子系の衝突による運動量保存とエネルギー保存を考えることで求めることができる。それを (3.3) と (3.4) に代入すれば、荷電粒子の電場中における平均的な振る舞いを知ることができる。

一方, Δt_α は

$$\Delta t_\alpha = \frac{1}{n_n \sigma_{\alpha n} v_{\alpha n}}$$

と書ける. ここで, n_n , $\sigma_{\alpha n}$, $v_{\alpha n}$ はそれぞれ中性粒子の数密度, 荷電粒子と中性粒子の衝突断面積, 荷電粒子と中性ガス粒子の相対速度である.

陽イオンと中性ガスの衝突の場合, 陽イオンの作る電場によって中性ガス粒子は分極する. それによって, 2粒子間には分極力と呼ばれる引力が働くために, σ_{in} は $1/v_{in}$ に比例することが分かっている (Wannier, 1943). 従って, $\sigma_{in} \propto 1/v_{in}$ となるために, $\Delta t_i = \text{const}$ となる.

しかし, 電子と中性ガス粒子の場合, 電子と中性ガス粒子間の相対速度は非常に速い. そのため, 衝突断面積は物理的な衝突断面積となり, それは相対速度に依存しない. $\Delta \sigma_{en} = \text{const}$ のため, $\Delta t_e \propto 1/v_{en}$ となる.

本研究では, 解析的な議論を続けるため, Δt_α は個々の荷電粒子の速度 $\mathbf{v}_\alpha$ に依存しないとする. そのため, 電子の平均衝突時間は,

$$\Delta t_e = \frac{1}{n_n \sigma_{en} \sqrt{\langle v_{en}^2 \rangle}} \quad (3.7)$$

であるという仮定を用いる. これは電子の中性ガス粒子との衝突は電子の熱的な速度が代表的であることを表している. なので, 電子の平均衝突時間は電子の平均エネルギー $\langle \epsilon_e \rangle = m_e \langle v_e^2 \rangle / 2$ によって決まることがわかる.

$\Delta \mathbf{v}_\alpha$ と $\Delta \epsilon_\alpha$ は2粒子系の衝突を考えることで求めることができ, 等方散乱, 弾性衝突を仮定すると, 2粒子の衝突前後の速度変化とエネルギー変化の立体角平均は

$$\Delta \mathbf{v}_\alpha = -\frac{m_n}{m_\alpha + m_n} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_n) \quad (3.8)$$

$$\Delta \epsilon_\alpha = -\frac{2m_\alpha m_n}{(m_\alpha + m_n)^2} (\epsilon_\alpha - \epsilon_n - \frac{1}{2}(m_\alpha - m_n) \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_n) \quad (3.9)$$

となる (Appendix A.3). これを (3.3) と (3.4) に代入し, $\langle \mathbf{v}_n \rangle = 0$ より,

$$\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle = \frac{m_\alpha + m_n}{m_\alpha m_n} q_\alpha \mathbf{E} \Delta t_\alpha \quad (3.10)$$

$$\langle \epsilon_\alpha \rangle = \langle \epsilon_n \rangle + \frac{(m_\alpha + m_n)^3}{2m_\alpha^2 m_n^2} (q_\alpha E \Delta t_\alpha)^2 \quad (3.11)$$

となる。(3.11) は右辺第二項目の電場を上げると荷電粒子の平均エネルギーが上昇する。つまり、この式は電場加熱を表している。

荷電粒子固有の温度をプラズマ温度と呼ぶ。荷電粒子の平均運動エネルギー $\langle \epsilon_\alpha \rangle (= \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2})$ から平均速度による運動エネルギーを引いた分がプラズマ温度の熱エネルギー $3k_B T_\alpha/2$ となる。電子は強電場においても熱的な運動が支配的なので、電子のプラズマ温度は $3k_B T_e/2 \equiv m_e \langle v_e^2 \rangle /2$ となる。一方、陽イオンは強電場では平均速度 $\langle \mathbf{v}_i \rangle$ でドリフト運動が支配的になる。このとき陽イオンのプラズマ温度は、 $3k_B T_i/2 \equiv \langle \epsilon_i \rangle - m_i \langle \mathbf{v}_i \rangle^2 /2$ と定義される。弱電離下では粒子はほぼ中性ガス粒子であるので、中性ガス粒子固有の温度はその場における「温度」に等しい。そのため、 $\langle \epsilon_n \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ である。

本研究では電子の電場加熱が効いてくる基準となる電場の値は Okuzumi & Inutsuka (in prep) と同じ (2.56) で表される E_{crit} を採用する。電子および陽イオンの平均運動エネルギーが E_{crit} によって規格化された電場の関数として現れることを以下に示す。

まず陽イオンの平均運動エネルギーの表式を求める。陽イオンの電場加熱が効いてくる基準となる電場に関しては、(3.11) の右辺第一項と第二項の比をとることで求められる。よって、陽イオンの電場加熱が支配的になる電場 $E_{\text{crit},i}$ は、

$$E > \frac{m_i m_n \sqrt{3k_B T}}{(m_i + m_n)^{3/2} e \Delta t_i} \equiv E_{\text{crit},i} \quad (3.12)$$

と書き表せる。 $E_{\text{crit},i}$ を使って陽イオンの (3.11) を書き直すと、

$$\langle \epsilon_i \rangle = \frac{3}{2} k_B T \left(1 + \left(\frac{E}{E_{\text{crit},i}} \right)^2 \right) \quad (3.13)$$

と書ける。

陽イオンが HCO^+ であるとして、質量を 29amu、中性ガス粒子との衝突速度係数 $\langle \sigma_{in} v_{in} \rangle$ を $1.8 \times 10^{-9} \text{cm}^3/\text{s}$ (Osterbrock, 1961; Sano et al., 2000) であるとする。 $E_{\text{crit},i}$ は、 $E_{\text{crit},i} \approx 3.3 \times 10^{-7} (T/100\text{K})^{1/2} (n_n/10^{12} \text{cm}^{-3}) [\text{esu cm}^{-2}]$ である。一

方, $E_{\text{crit}} \approx 1.2 \times 10^{-9} (T/100\text{K})(n_n/10^{12}\text{cm}^{-3})$ であるから 2 つの比をとれば,

$$\frac{E_{\text{crit},i}}{E_{\text{crit},e}} \approx 2.8 \times 10^2 \left(\frac{T}{100\text{K}} \right)^{-1/2} \quad (3.14)$$

となる (Okuzumi & Inutsuka, in prep).

E_{crit} によって規格化するために (3.13) にこの関係を用いれば,

$$\langle \epsilon_i \rangle \approx \frac{3}{2} k_B T \left(1 + 1.3 \times 10^{-5} \left(\frac{T}{100\text{K}} \right) \left(\frac{E}{E_{\text{crit}}} \right)^2 \right) \quad (3.15)$$

となる.

次に電子の平均エネルギーの規格化を行う. その際に電子の平均自由時間は (3.7) の仮定を用いる. 電子の平均エネルギーは

$$\langle \epsilon_e \rangle = \langle \epsilon_n \rangle + \frac{3(m_e + m_n)^3}{2m_n^3} \frac{k_B^2 T^2}{\langle \epsilon_e \rangle} \left(\frac{E}{E_{\text{crit}}} \right)^2 \quad (3.16)$$

$$(3.17)$$

となる. これは $\langle \epsilon_e \rangle$ の 2 次方程式である. よって 2 次方程式の解の公式を用いれば,

$$\langle \epsilon_e \rangle = \frac{1}{2} \langle \epsilon_n \rangle + \sqrt{\frac{\langle \epsilon_n \rangle^2}{4} + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{m_e}{m_n} \right)^3 k_B^2 T^2 \left(\frac{E}{E_{\text{crit}}} \right)^2} \quad (3.18)$$

$m_e \ll m_n$ であることと $\langle \epsilon_n \rangle = 3k_B T/2$ を用いれば,

$$\langle \epsilon_e \rangle \approx \frac{3}{2} k_B T \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \left(\frac{E}{E_{\text{crit}}} \right)^2} \right) \quad (3.19)$$

となる.

以上の導出の妥当性を確かめるために, Okuzumi & Inutsuka (in prep) の荷電粒子の平均運動エネルギーを表す図 2.6 に対し, (3.15), (3.16) を新たにプロットしたものを図 3.1 に載せた. 今回の導出のプロットは厳密な速度分布を用いたものと十分に一致している.

最後に後の式との関連のため (3.15) および (3.16) を荷電粒子固有の温度 T_α を用い

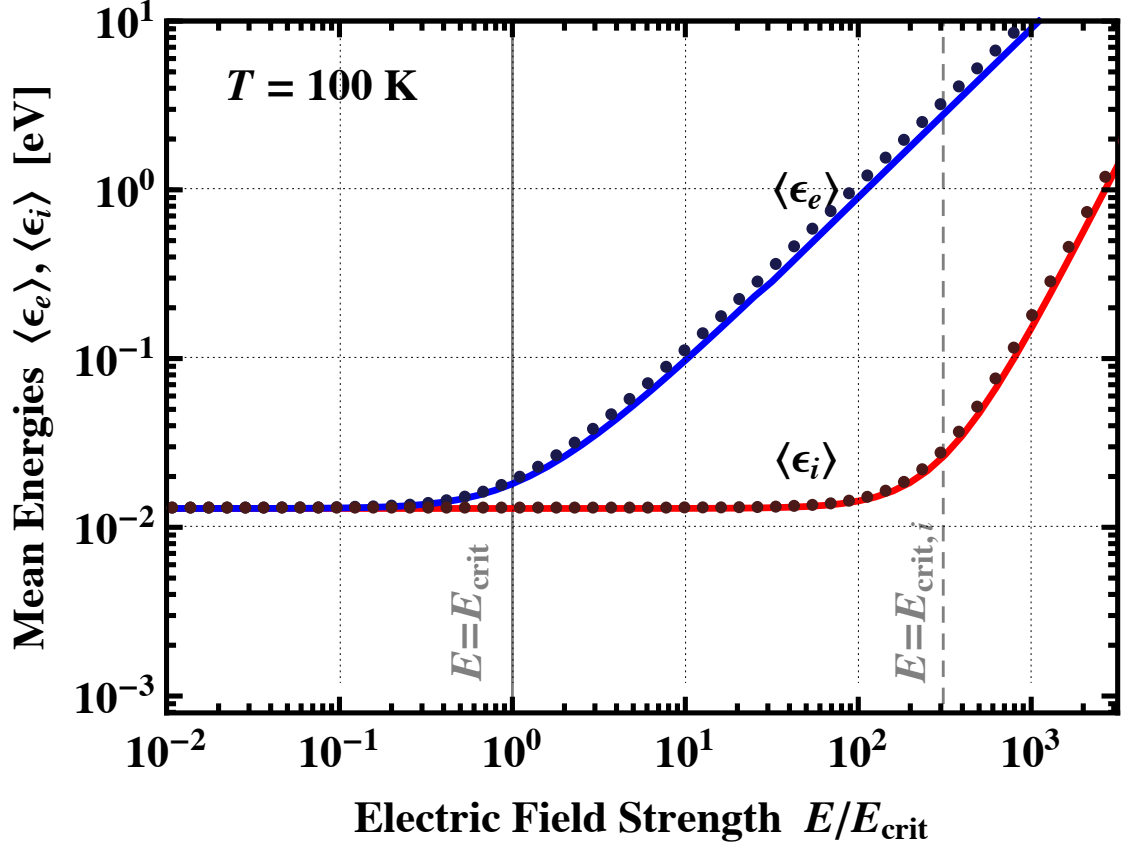


図 3.1 Okuzumi & Inutsuka (in prep) で荷電粒子の平均運動エネルギー電場依存性を表す図 2.6 の上に (3.15) および (3.16) を新たにプロットした。横軸が E_{crit} によって規格化された電場、縦軸が平均運動エネルギーで単位は [eV] である。赤い実線と青い実線がそれぞれ元の図の陽イオンと電子の平均運動エネルギーを表す。赤丸のプロットと青丸のプロットは、今回新たに Okuzumi & Inutsuka (in prep) とは異なる導出から求めた陽イオンと電子の平均運動エネルギーである。

て表す。 $3k_B T_e/2 \equiv m_\alpha \langle v_e^2 \rangle /2$ と $3k_B T_i/2 \equiv \langle \epsilon_i \rangle - m_\alpha \langle v_e \rangle^2 /2$ を用いれば、

$$T_e \approx T \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \left(\frac{E}{E_{\text{crit}}} \right)^2} \right) \quad (3.20)$$

$$T_i \approx T \left(1 + 8.0 \times 10^{-7} \left(\frac{T_n}{100\text{K}} \right) \left(\frac{E}{E_{\text{crit}}} \right)^2 \right) \quad (3.21)$$

と表すことができる。

3.1.2 非線形オーム則の計算で用いる電離反応計算

電離反応計算には 2.3.4 で詳しく扱った Okuzumi & Inutsuka (in prep) の手法を用いる。それによれば荷電粒子の数密度は解析的に, (2.66) で見たように,

$$n_{\alpha}^{(\text{eq})} = \frac{\zeta n_n}{K_{d\alpha} n_d} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{K_{\text{rec}} \zeta n_n}{K_{di} K_{de} n_d^2}} \right)^{-1} \quad (2.66)$$

と表される。ダストの平均帯電数はこれを持ちいて, (2.67) で見たように,

$$Z^{(\text{eq})} = \frac{1}{n_d} (n_e^{(\text{eq})} - n_i^{(\text{eq})}) \quad (2.67)$$

と表される。

気相再結合係数 K_{rec} と電離速度 ζ は Okuzumi & Inutsuka (in prep) と同じものを用いる。気相再結合速度係数 K_{rec} には電子と HCO^+ の衝突速度係数を使い,

$$K_{\text{rec}} = 2.4 \times 10^{-7} \left(\frac{T_e}{300\text{K}} \right)^{-0.69} [\text{cm}^3/\text{s}] \quad (3.22)$$

と表される (Ganguli et al., 1988)。また, 電離速度 ζ には円盤上層部の希薄な領域での銀河宇宙線の代表的な値 10^{-17}S^{-1} を用いる。

次の項で示すが, $K_{d\alpha}$ はダストの帯電電荷数 Z の関数である。そのため, 電離状態は 1 回の計算で求めることはできない。電離状態は以下の通りである。まず, (2.67) を持ちいて Z を計算する。その後に $K_{d\alpha}$ を計算する。以上の反復計算を行い誤差が少なくなるまで行う。しかし, この計算は収束があまり保証されていないという計算手法的問題がある。そのため, Z を変数に持つ関数 $F_{\text{N.L.}}(Z) \equiv n_e^{(\text{eq})} - n_i^{(\text{eq})} - Z n_d$ が 0 になるような Z を Newton-Lapson 法を用いて求めた。値に依るが, 数回～十数回の反復計算で誤差 10^{-8} に収まるため, 計算コストは十分低いと言える。

ダストと荷電粒子の吸着速度係数 $K_{d\alpha}$ は, Okuzumi & Inutsuka (in prep) では応用に適さないので, これについても簡潔な式の導出を試みる。

3.1.3 ダストの荷電粒子吸着速度係数の導出

Okuzumi & Inutsuka (in prep) において、ダストの荷電粒子の吸着速度係数は特殊関数を用いて表される。これは吸着速度係数を導く際に荷電粒子の速度分布を考慮し、吸着速度の平均値を求めているからである。速度分布は弱電離下における電場中の荷電粒子の速度分布を用いている。本研究では、荷電粒子の電場加熱による温度に関するマクスウェル分布を用いるとする。この近似は、厳密な速度分布の形状がマクスウェル分布と大差ないものであるならこの近似はうまくゆくと期待できる。あるいは、荷電粒子のダストへの吸着現象が速度分布の平均値によって代表されるような現象であってもこの近似がうまくゆくと期待できる。

荷電粒子の速度 v_α 、荷電粒子の質量 m_α 、荷電粒子の電荷 q_α 、ダスト表面の静電ポテンシャル ϕ_d 、ダスト半径 a とすれば荷電粒子の衝突断面積 $\sigma_{\alpha d}$ は、

$$\sigma_{\alpha d} = \begin{cases} a^2 \pi \left(1 - \frac{2q_\alpha \phi_d}{m_\alpha v_\alpha^2} \right) & (|v_\alpha| > \sqrt{2q_\alpha \phi_d / m_\alpha}) \\ 0 & (0 < |v_\alpha| < \sqrt{2q_\alpha \phi_d / m_\alpha}) \end{cases} \quad (3.23)$$

と表される。

マクスウェル分布は

$$f_{\text{Maxwell}} = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k_B T_\alpha} \right) \exp \left(\frac{-m_\alpha v_\alpha^2}{2k_B T_\alpha} \right) \quad (3.24)$$

を用いる。

ある速度における衝突速度 $v_\alpha \sigma_{\alpha d}$ を積分範囲に注意して、平均をとれば、

$$K_{d\alpha} = \pi a^2 u_\alpha \begin{cases} (1 - \Psi_\alpha) & (\Psi_\alpha < 0) \\ \exp(-\Psi_\alpha) & (\Psi_\alpha > 0) \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\Psi_\alpha = \frac{q_\alpha \phi_d}{k_B T_\alpha}$$

$$u_\alpha = \sqrt{\frac{8k_B T_\alpha}{\pi m_\alpha}}$$

となる。ここで Ψ_α はダストによる荷電粒子のポテンシャルエネルギーと荷電粒子の熱エネルギーとの比になっているそれは、ダストと荷電粒子の間に引力が働く時

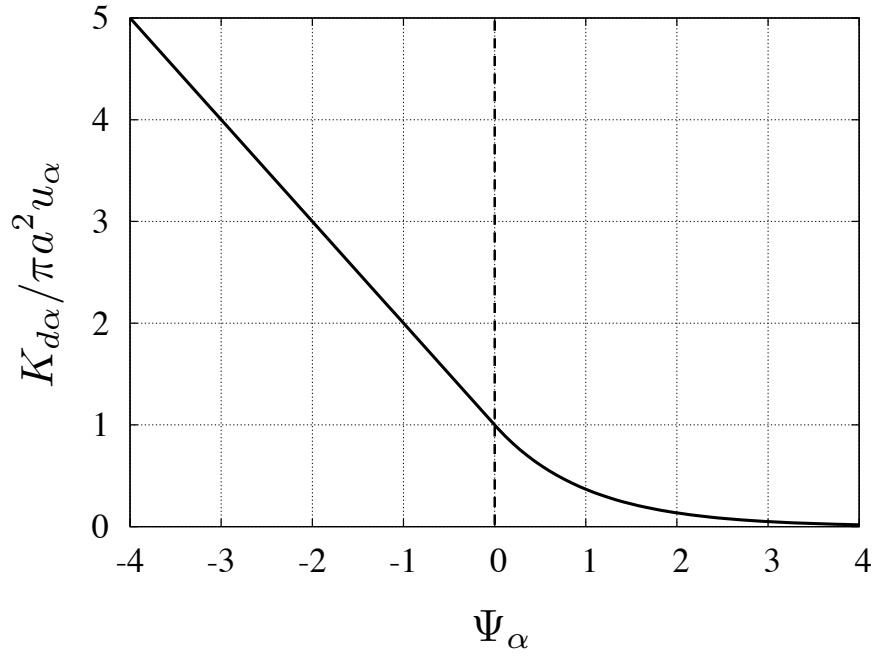


図 3.2 $K_{d\alpha}/\pi a^2 u_\alpha$ の Ψ_α 依存性を表す. つまり, Ψ_α が負の時, $1 - \Psi_\alpha$ であり, Ψ_α が正の時, $\exp(-\Psi_\alpha)$ である関数である. また Ψ_α の正・負はそれぞれダスト荷電粒子間の力が斥力・引力の時を表す.

$\Psi_\alpha < 0$, ダストと荷電粒子の間に斥力が働く時 $\Psi_\alpha > 0$ となる. Ψ 依存性の部分を図 (3.2) に示した. 引力の時, 吸着速度は上昇し, 斥力の時, 吸着速度は減少することが分かる. これを荷電粒子-ダスト間の吸着速度係数として用いる.

3.1.4 導出を変更した結果

以上の議論より, 非線形オーム則の導出を比較的簡単な式で表すことに成功した. 従って, 非線形オーム則を導くには, まずある電場におけるプラズマ温度と平均速度を計算する. 次にダスト吸着速度係数を用いて解析的に荷電粒子の数密度を計算する. 最後に電流密度を計算すれことで, 電場と電流密度の関係が求まる.

図 3.3 に本研究で計算した結果と Okuzumi & Inutsuka (in prep) との比較を示した. 電子の電流密度の減少及び陽イオンの電流を十分再現している.

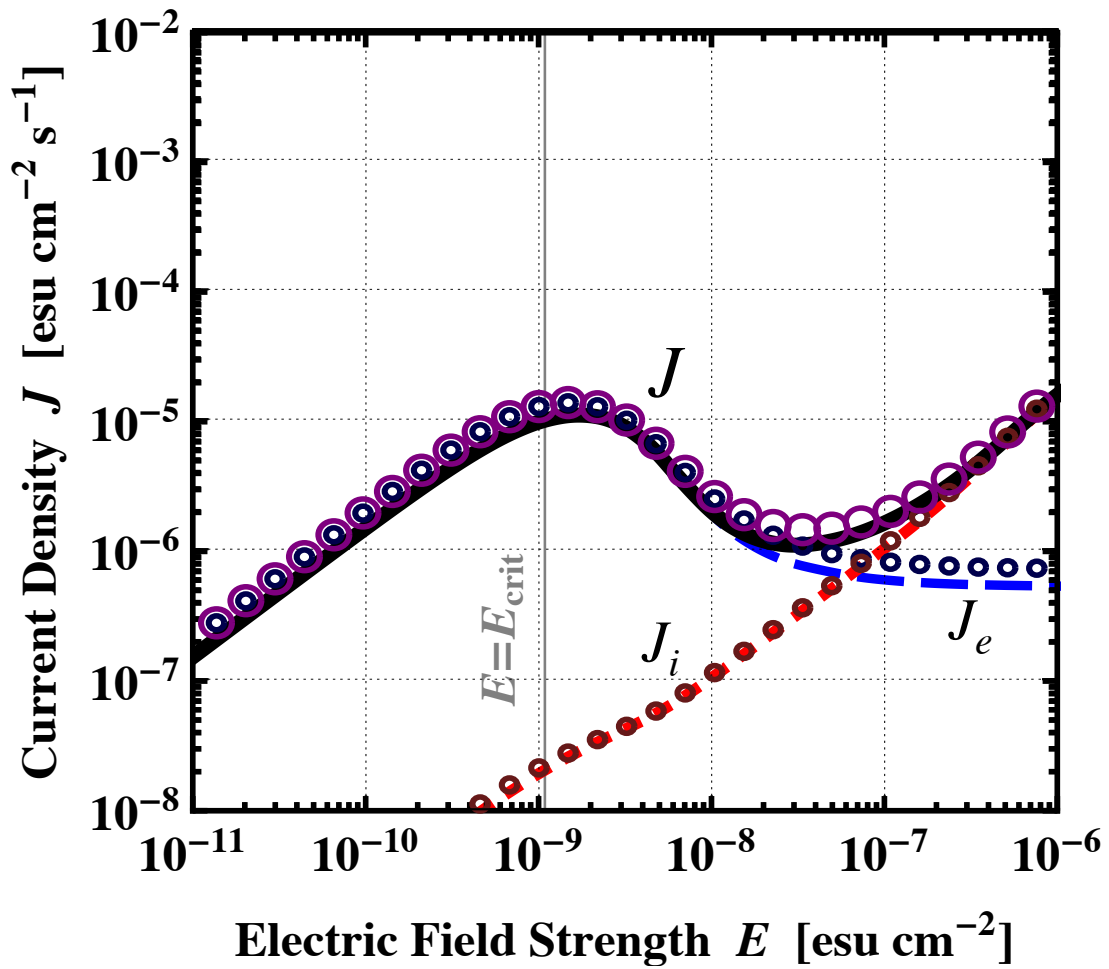


図 3.3 本研究による新たな導出方法による非線形オーム則と Okuzumi & Inutsuka (in prep) の 2.9 の非線形オーム則を重ねてプロットした図. 実線および破線は Okuzumi & Inutsuka (in prep) の非線形オーム則であり, プロットは本研究の導出による非線形オーム則である.

3.2 非線形オーム則を考慮したデッドゾーン

この節では非線形オーム則を考慮したデッドゾーンの結果を載せる．はじめに基準となるモデルでの結果を説明した後，パラメータ依存性を調べる．

3.2.1 計算モデル

円盤モデル

円盤構造は Sano et al. (2000) で用いられたものと同じものを採用する．円盤の面密度は，最小質量円盤モデルを基準としており，

$$\Sigma(r) = 1.7 \times 10^3 \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-1.5} f_{\Sigma} \text{g cm}^{-2} \quad (3.26)$$

とする (Hayashi, 1981)．最小質量円盤では $f_{\Sigma} = 1$ である．

温度分布は光学的に薄い円盤を考え，

$$T(r) = 280 \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-p} \left(\frac{L_*}{L_{\odot}} \right)^{1/4} \text{K} \quad (3.27)$$

とする．温度分布が決まると音速も決まり，等温変化を仮定し，

$$c_s(r) = \left(\frac{k_B T(r)}{m_{\mu}} \right)^{1/2} \quad (3.28)$$

とする．ここで， k_B はボルツマン定数， m_{μ} は気相の平均質量である．空間密度分布は，中心星の重力とガス圧による静水圧平衡の式から

$$\rho(r, z) = \rho_c(r) \exp \left(-\frac{z^2}{2H(r)^2} \right) \quad (3.29)$$

と書ける．

ここで ρ_c は赤道面での密度であり，面密度と関係付けられ， $\rho_c(r) = \Sigma/H\sqrt{2\pi}$ と表される． $H(r)$ はガス密度のスケールハイトで，

$$H(r) = \frac{c_s}{\Omega} \quad (3.30)$$

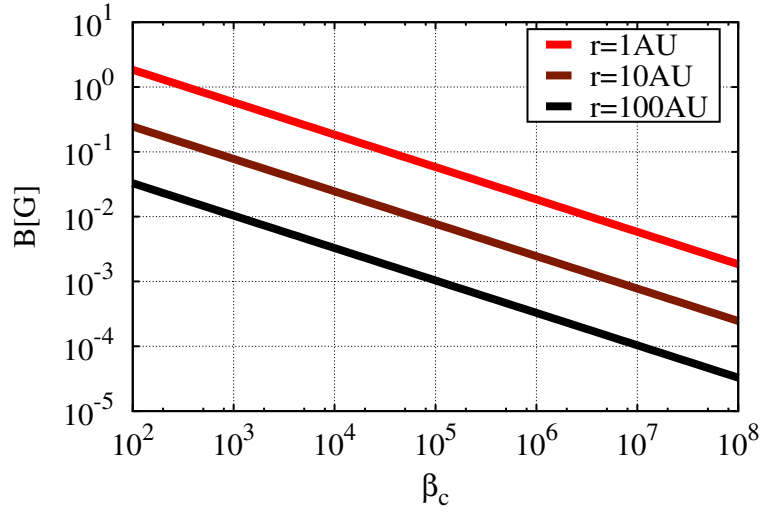


図 3.4 $r = 1\text{AU}, 10\text{AU}, 100\text{AU}$ での磁場の β_c 依存性. 赤色の線が $r = 1\text{AU}$, 茶色の線が $r = 10\text{AU}$, 黒色の線が $r = 100\text{AU}$ での磁場を表す.

とする. ここで Ω はケプラー角速度である. ρ_c は上記のモデルを用いれば,

$$\rho_c = 1.4 \times 10^{-9} f_{\Sigma} \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-11/4} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_{\mu}}{2.34\text{amu}} \right)^{1/2} \quad (3.31)$$

と表される.

磁場分布は赤道面でのプラズマベータ値 β_c を円盤全体で一定であると仮定することとで与えられ,

$$B(r) = \sqrt{\frac{8\pi\rho_c}{\beta_c}} c_s \quad (3.32)$$

とする. 本研究で β_c はパラメータとする. ρ_c と c_s に上記の値を用いれば B は,

$$B = 1.8 \times \left(\frac{\beta_c}{0.01} \right)^{-1/2} \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-7/8} \text{ G} \quad (3.33)$$

と表せられる. $r = 1\text{AU}, 10\text{AU}, 100\text{AU}$ での磁場強度 B と β_c の関係を図 3.4 に示した.

非線形オーム則の計算ではダスト数密度 n_d を用いる. ダスト 1 粒子の代表的な質量 m_d とガス密度に対するダスト密度の比 f_{dg} を用いれば, $f_{dg} = m_d n_d / \rho$ という関係がある. f_{dg} はダストガス質量比と呼ばれる. この星間ガスの典型的な値は 0.01

である。ダストを球形とすると、 $m_d = 4\pi a^3 \rho_\bullet / 3$ と書ける。ここで、 a はダスト半径、 $\rho_\bullet$ はダストの物質密度である。これらより、 n_d は、

$$n_d = \frac{3f_{dg}\rho}{4\pi a^3 \rho_\bullet} \quad (3.34)$$

となる。

中性ガスを主に電離するものは銀河からやってくる宇宙線を考える。原始惑星系円盤に対して等方的に宇宙線が入射してくると考えると、 ζ は、

$$\zeta(r, z) = \frac{\zeta_{CR}}{2} \left\{ \exp\left(-\frac{\chi}{\chi_{CR}}\right) + \exp\left(-\frac{\Sigma - \chi}{\chi_{CR}}\right) \right\} + \zeta_R \quad (3.35)$$

と表される (Umebayashi & Nakano, 1981)。ここで ζ_{CR} は銀河宇宙線の代表的な値で 10^{-17}s^{-1} をとり、 χ_{CR} は 96 g cm^{-2} である。また、 $\chi(r, z)$ はある点に到達するまでに宇宙線が経験してくる面密度で、

$$\chi \equiv \int_z^\infty \rho(r, z) dz \quad (3.36)$$

と定義される。これは実際に ρ を代入し、計算を進めれば、

$$\chi = \frac{\Sigma}{2} \text{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}H}\right) \quad (3.37)$$

と表すことができる。 ζ_R は円盤内の放射性核種からのによる電離速度で、 $\zeta_R \approx 1.0 \times 10^{-23} (f_{dg}/0.01) \text{s}^{-1}$ である。

局所デッドゾーン条件

本研究では、デッドゾーンは、理想 MHD においては不安定であるが、非理想 MHD のオーム散逸によって安定化する領域であると定義する。デッドゾーンを判定する条件として、理想 MHD で MRI の起きる条件には (2.49) を用いる。またオーム散逸が効く条件には (2.53) を用いる。磁気拡散係数 η には (2.51) を用いれば、ある点 (r, z) におけるデッドゾーン条件は、

$$2\pi \frac{v_A}{\Omega_0} \lesssim H \quad \text{and} \quad \sigma_c(r, z) < \frac{c^2}{2v_A H} \quad (3.38)$$

と表すことができる。本研究ではこれを用いる。

ある電場 E における、オーム散逸が効く基準となるの電流密度を J_{crit} と書けば、MRI が成長する条件は

$$J(E) \gtrsim J_{\text{crit}} \equiv \frac{c^2}{2Hv_A} E \quad (3.39)$$

となる。オームの法則が線形であったときは、単に電離計算を行い、求めた電気伝導度と $c^2/2Hv_A$ を比べれば良かった。しかし、非線形オーム則では電気伝導度が電場依存する。そのため、このように電流密度で不安定条件を考えるのが便利である。

もし、磁気乱流によって電場が上限なく上昇すると、いずれ電場加熱が起きる。しかし、実際の MRI はある程度まで成長すると飽和状態に達する。そのため、電場加熱が起こるより先に、MRI が飽和状態に達する場合は、電流密度の減少は起きない。

Muranushi et al. (2012) によってオーム散逸を考慮した数値計算が行われた。その結果によれば、MRI によって起こる最大電流密度は

$$J_{\text{max}} \sim 10 \sqrt{\frac{\rho}{8\pi}} c \Omega \quad (3.40)$$

と表せられる。この値はガス密度と角速度のみで決まる物理量である。この理由については 3.3.2 項で触れる。

MRI が成長する領域において、非線形オーム則を考慮したオーム散逸が効く条件は以下の通りである。まず、非線形オーム則に従い、低電場極限から計算してゆく。電流密度が J_{max} に到達すれば、その場所は持続的な乱流状態となる。電場加熱が起き、電流密度が先に J_{crit} に到達すれば、その場所はオーム散逸が効く。図 3.5 にこの概念図を載せた。

本研究では MRI の成長に伴って電場も成長するとしている。しかし、3.3.3 項でも触れるが、オーム散逸が効いた後、電場が乱流とともにどのように進化するかは明らかでない。そのため、本研究ではオーム散逸が効いた後の電場の進化については詳しく言及しない。

Sano et al. (2000) ではオーム散逸の条件を満たすものをデッドゾーンとしていた。以下では便宜上のため、非線形オーム則によってオーム散逸の安定化条件 (3.38) を満たした領域を非線形オーム則によるデッドゾーンと呼ぶことにする。非線形オーム則

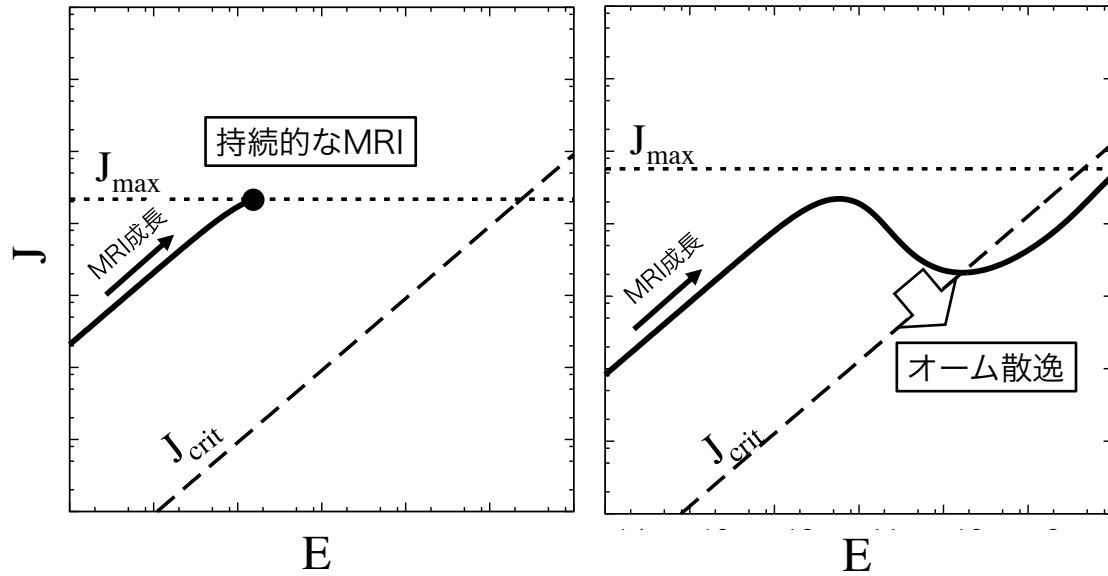


図 3.5 非線形オーム則によるデッドゾーンを判定する条件を表した概念図。左図が電場加熱が起こる前に $J_{\max}$ に達した場合である。右図が電場加熱が起き、 J_{crit} に達した場合である。実線は非線形オーム則に従った電流密度を表す。点線と破線はそれぞれ $J_{\max}$ と J_{crit} を表す。電流密度が最大値 $J_{\max}$ に達すると、 $J_{\max}$ で乱流が持続する。電流密度が最大値 J_{crit} に達すると、オーム散逸が効く。

によるデッドゾーンは、MRI が成長した結果としてオーム散逸が起きる領域である。そのため、Sano et al. (2000) のデッドゾーンのように全く MRI が起きない領域とは異なるという点に注意を要する。

計算手法

計算手法は以下の通りである。まず、ある場所における温度、ガス密度、電離速度、アルフベン速度、ケプラー角速度、ガス密度スケールハイトの値を求める。その後、温度、ガス密度、電離速度から非線形オーム則に従った電流密度の値を弱電場から計算してゆく。その電流密度が $J_{\max}$ 以上、もしくは J_{crit} 以下になった時に計算を止める。そのようにして、局所的な不安定状態を判断する。これを円盤の全体を通して行うことで、非線形オーム則によるデッドゾーンを描くことができる。

3.2.2 基準モデルにおける結果

本研究ではケプラー回転をする光学的に薄い最小質量円盤モデルを基準となるモデルとし、中性ガス粒子は H_2 、陽イオンは HCO^+ に代表されたとする。また、円盤質量パラメータ f_Σ は 1、ダストガス質量比 f_{dg} は 0.01、ダスト半径 a は $0.1\mu\text{m}$ 、赤道面でのプラズマベータ値 β_c は 10^2 、ダストの物質としての密度を $3\text{g}/\text{cm}^3$ 、中心星の質量 M_* は 1 太陽質量 $M_\odot$ 、中心星のルミノシティ L_* は 1 太陽ルミノシティ $L_\odot$ を基準とする。電離源は銀河宇宙線が支配的だとする。

前節の手法を用いて非線形オーム則を考慮したデッドゾーンは図 3.6 になる。図 3.6 によれば Sano et al. (2000) のデッドゾーンは赤道面において 19AU までしかない。それに対し、非線形オーム則によるデッドゾーンは 70AU まで及ぶ。非線形オーム則によるデッドゾーンは Sano et al. (2000) のデッドゾーンよりも 4 倍程度大きな領域である。

図中の H_{ideal} は理想 MHD で MRI が起きる高さを表している。 $\beta_c = 10^2$ では H_{ideal} はガス密度スケールハイト H より下に存在する。これは磁場が強いために H 以下という密度の高い領域でも、MRI が起きうるためである。

また、図 3.7 に図 3.6 の赤道面上における $r = 60\text{AU}$ と $r = 80\text{AU}$ での電流密度と電場の関係をそれぞれ示した。図 3.6 において $r = 60\text{AU}, z = 0\text{AU}$ は非線形オーム則によるデッドゾーンである。これは、図 3.7 の左図によれば、電場加熱により電流密度が減少し、オーム散逸が効くためにデッドゾーンとなっている。また、図 3.6 において $r = 80\text{AU}, z = 0\text{AU}$ は非線形オーム則による持続的な不安定状態である。これは、図 3.7 の右図によれば、電場加熱が起こる前に電流密度が最大値に達している。

これらの結果から、非線形オーム則によるデッドゾーンでは、電場加熱による電気伝導度の減少によって、オーム散逸が起きていると理解できる。

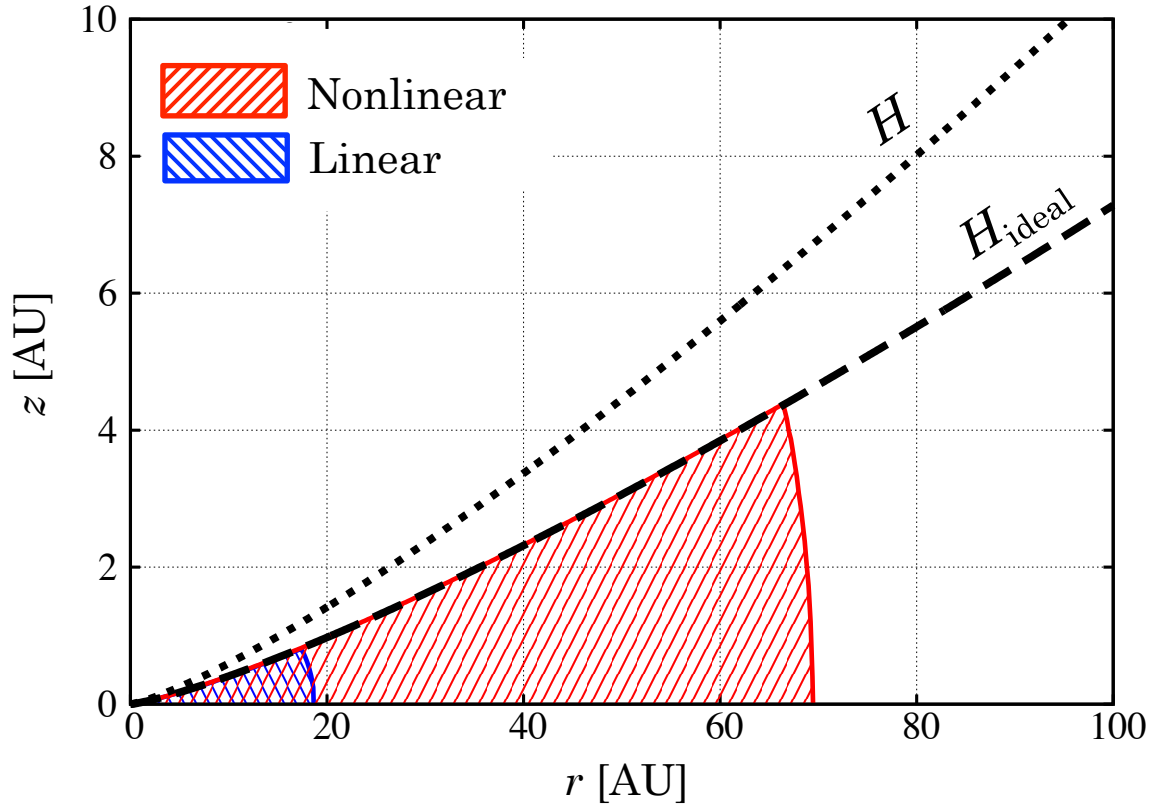


図 3.6 非線形オーム則によるデッドゾーンと Sano et al. (2000) のデッドゾーンを比較した図である。青色の斜線領域は Sano et al. (2000) で描かれたデッドゾーンである。赤色の斜線領域は非線形オーム則によるデッドゾーンである。点線で描かれた H_r は (3.30) で表されるスケールハイトである。破線で描かれた H_{ideal} は (2.55) で表され、理想 MHD において密度が低いために磁場が円盤ガスと結合してないことによって安定になるスケールハイトである。

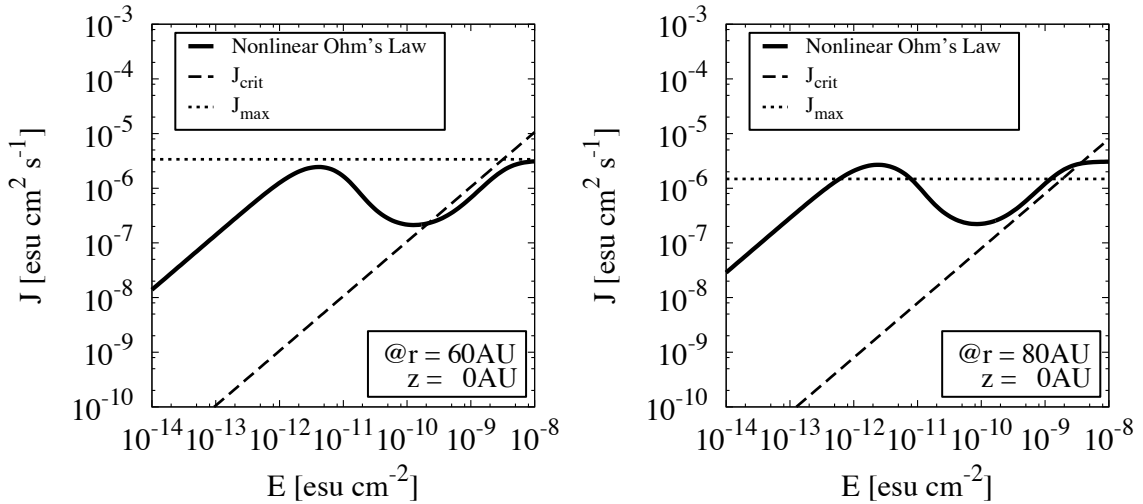


図 3.7 図 3.6 の赤道面上における $r = 60\text{AU}$ と $r = 80\text{AU}$ での電流密度と電場の関係。実線は非線形オーム則を表しており、点線は MRI が最大まで成長した時の電流密度 J_{max} を表し、破線はオーム散逸が起こり MRI が安定化する critical な電流密度 J_{crit} を表している。

3.2.3 プラズマ β_c 依存性

次に赤道面におけるプラズマ β_c のパラメータ依存性を調べる．初期に与える z 方向に一樣な磁場 $B(r)$ は (3.32) のように β_c を与えることで決まる．また赤道面でのガス密度 ρ_c は最小質量円盤モデルから設定として与えられる．そのため β_c を大きくするという操作は，磁場を独立に弱くするという操作に相当する．

図 3.8 に非線形オーム則によるデッドゾーンの図を $\beta_c = 10^2$ から 10^7 まで並べた．従来のデッドゾーンは β_c が増加すると，デッドゾーンも増加していたしかし，非線形オーム則によるデッドゾーンの大きさは β_c に依存しない．また表 3.1 に各 β_c でのデッドゾーン外縁半径 r_{out} の値を示した．

β_c が増加すると， B を通して v_A が減少する． v_A の減少によって，オーム散逸の安定化基準である電気伝導度 $\sigma_{c,\text{crit}} \equiv c^2/2Hv_A$ が増加する．図 3.5 を用いて説明すれば， β_c の増加は J_{crit} を y 方向に並進させることに等しい．非線形オーム則によるデッドゾーンは電気伝導度の減少によっておこる．そのため，典型的には，電気伝導度の減少がおきる限り， β_c の変化はオーム散逸が起きるという結果に影響を与えない．

表 3.1 図 3.8 の各デッドゾーンの大きさ $r_{\text{out}}[\text{AU}]$ の β_c 依存性

β_c	従来	非線形オーム則
10^{-2}	19	69
10^{-3}	22	69
10^{-4}	25	69
10^{-5}	29	69
10^{-6}	35	69
10^{-7}	44	69

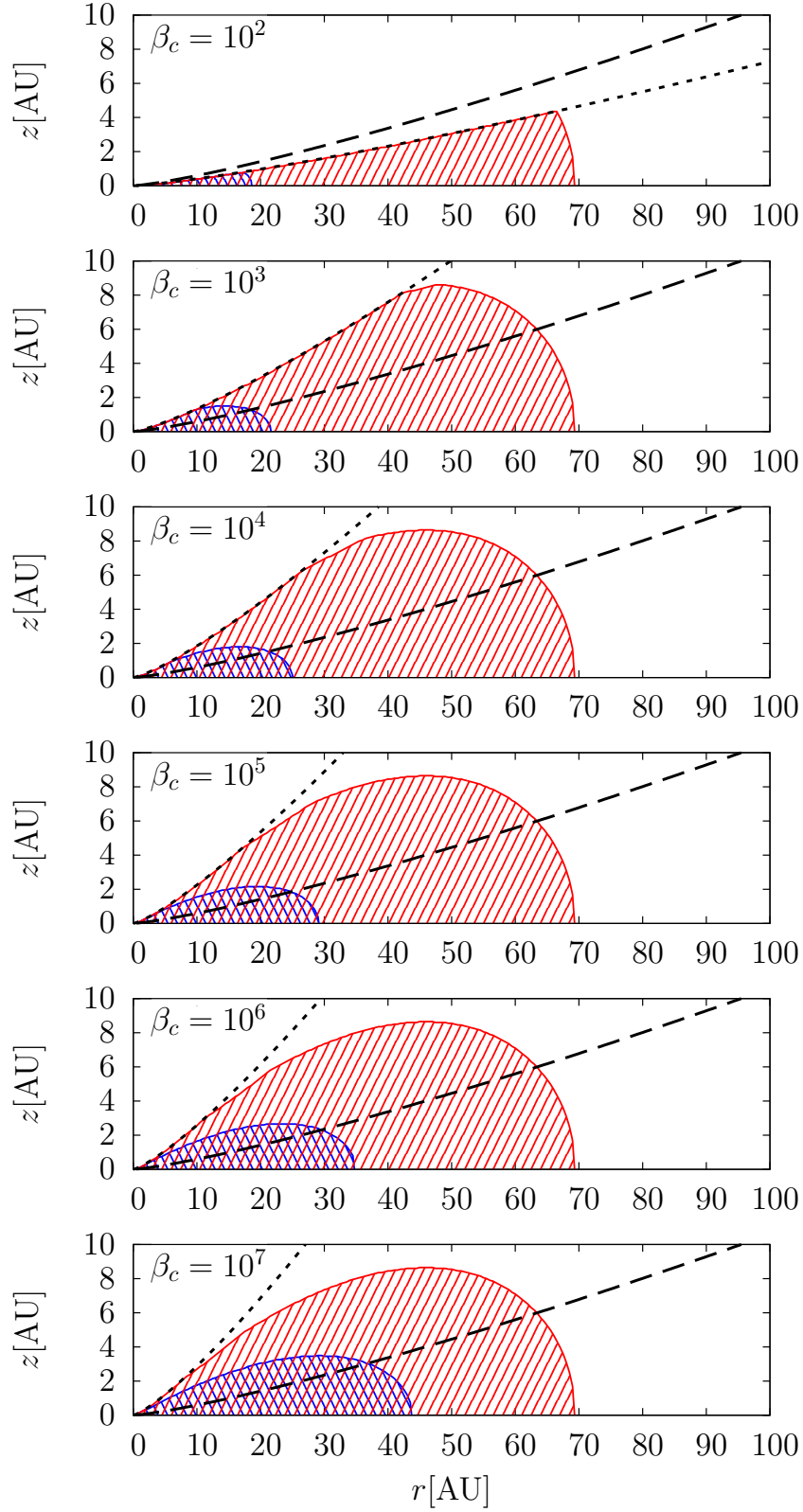


図 3.8 非線形オーム則によるデッドゾーンの β_c の依存性. 上から順に $\beta_c = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ である. 赤色の斜線領域が非線形オーム則によるデッドゾーンで, 青色斜線領域が従来のデッドゾーンである.

3.2.4 ダスト密度依存性

次にダスト密度を変化させてみる．ダスト密度は，ガス密度に対してのダスト密度の比である f_{dg} によって与えているので，これを変化させる．基準となる f_{dg} の値は，星間ガスの代表的な値 0.01 を用いている．ダストの濃集あるいは拡散によってこの値は変化すると考えられる．いくつか微惑星を形成したような場合は，周囲のガスのダストは減るため， f_{dg} は減少する．そのため， f_{dg} は円盤の進化を表しているとも考えることもできる．また，円盤の赤道面にダストが重力により沈殿する場合は， f_{dg} は増加する．

図 3.9 に非線形オーム則によるデッドゾーンの図を $f_{dg} = 10^{-1}$ から $f_{dg} = 10^{-5}$ ままで並べた． f_{dg} を下げると，従来のデッドゾーンと非線形オーム則によるデッドゾーンは共に小さくなっている．逆に f_{dg} を基準から一桁上げると，非線形オーム則によるデッドゾーンの大きさは 160AU 程度にもなる． f_{dg} が下がると非線形オーム則によるデッドゾーンの絶対的な大きさは減少する．しかし，従来のデッドゾーンに対する相対的な大きさはほとんど変化しない．両者の比をとれば， f_{dg} が変化しても，非線形オーム則によるデッドゾーンは従来のデッドゾーンの大体 2～4 倍程度の大きさを持つ．

表 3.2 図 3.9 の各デッドゾーンの大きさ $r_{\text{out}}[\text{AU}]$ の f_{dg} 依存性

f_{dg}	従来	非線形オーム則
10^{-1}	40	155
10^{-2}	19	69
10^{-3}	8.4	31
10^{-4}	4.9	16
10^{-5}	3.8	8.1

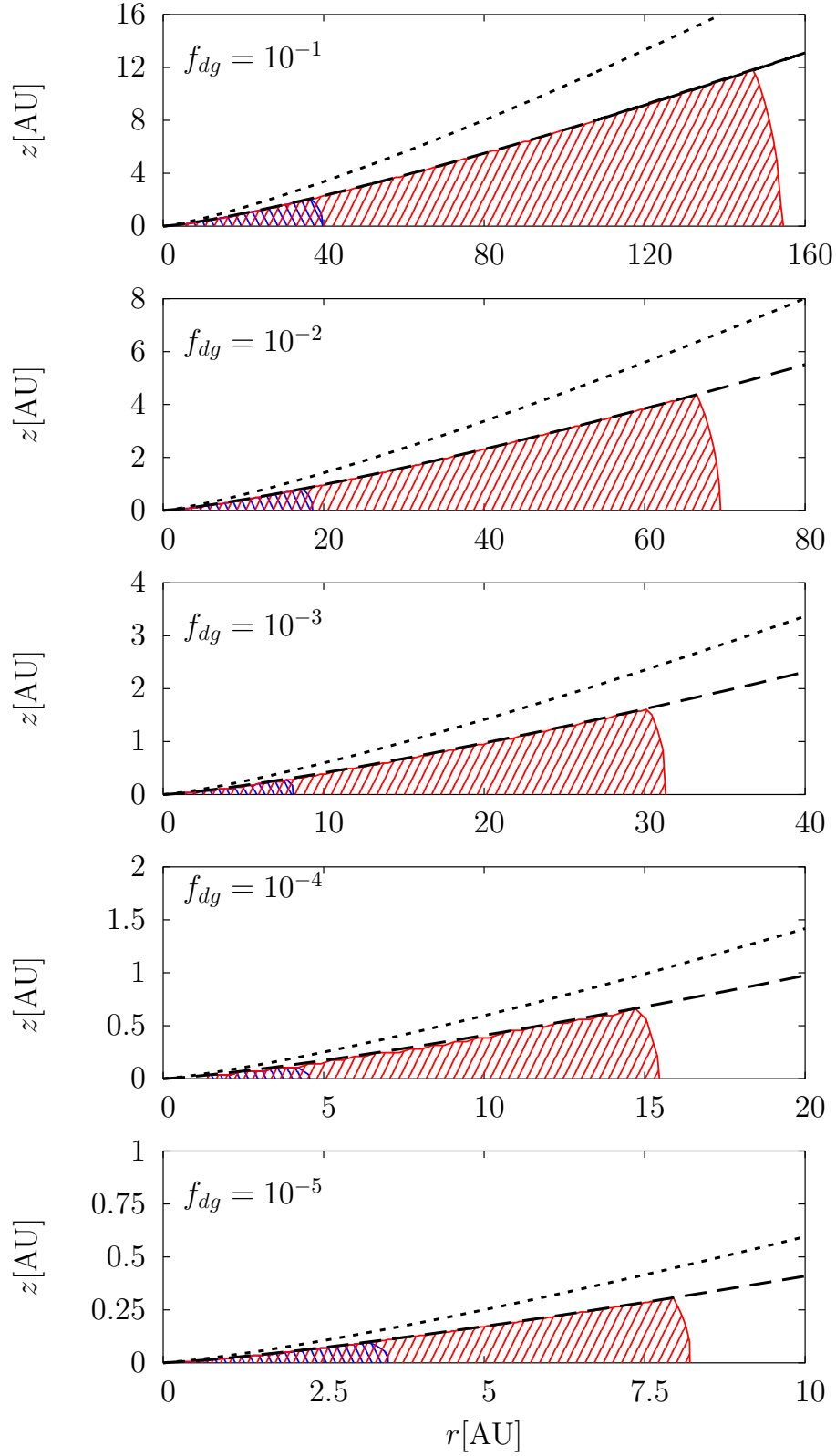


図 3.9 非線形オーム則によるデッドゾーンの β_c の依存性. 上から順に $f_{dg} = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ である. 赤色の斜線領域が非線形オーム則によるデッドゾーンで, 青色斜線領域が従来のデッドゾーンである. 各図はデッドゾーンがちょうど収まるようにスケールを変えている,

3.2.5 非線形オーム則によるデッドゾーン半径の解析的な式

非線形オーム則によるデッドゾーンの大きさは、非線形オーム則をモデル化することによって解析的に見積もることができる。通常、非線形オーム則によるデッドゾーンでは電場加熱による電流密度の減少が起きていると考えられる。また、持続可能な MRI が起きる領域では電流密度の減少が起きる前に MRI によっておこる最大の電流密度 $J_{\max}$ に達すると考えられる。従って、非線形オーム則によるデッドゾーンと持続可能な MRI 領域の境界では、電流密度の減少が起きたときの電流密度が $J_{\max}$ に等しいと考えられる。そこで、

$$r_{\text{out,NL}} : J(E_{\text{crit}}) = J_{\max} \quad (3.41)$$

が成り立つことが $r_{\text{out,NL}}$ を決定する条件であるとする。しかし上の条件は誤差を含むために、解析的には依存性を見る程度に留め、具体的な係数は基準モデルのデッドゾーンの大きさを用いて定める事にする。

まず左辺を先に変形した後に上記の条件を求める。(2.17) の線形オーム則の電気伝導度、(2.56) の E_{crit} の電場加熱が効く基準となる電場を使えば、

$$J(E_{\text{crit}}) = \frac{e^2 n_e \Delta t_e}{m_e} \cdot \sqrt{\frac{6m_e}{m_n}} \frac{k_B T}{e l_e}$$

と書ける。ここで、(2.17) に対し $E \lesssim E_{\text{crit}}$ では電子の電気伝導度が重要であることを用いた。 n_e には (2.66) を、 Δt_e には (3.7) を、 l_e には $l_e = 1/n_n \sigma_{en}$ を用いれば、

$$J(E_{\text{crit}}) = \frac{\zeta n_n}{K_{d\alpha} n_d} \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{n_n \sigma_{en} \sqrt{\langle v_{en}^2 \rangle}} \cdot \sqrt{\frac{6m_e}{m_n}} \frac{k_B T}{e} n_n \sigma_{en}$$

となる。ここで n_e に対し、今考えているような電流密度の減少が大きい設定では $n_e \approx \zeta n_n / K_{d\alpha} n_d$ が成り立つことを用いた (Okuzumi & Inutsuka, in prep). K_{de} に対し (3.25) を、 n_d に対し (3.34) を、を用いれば

$$J(E_{\text{crit}}) = \frac{1}{\pi a^2} \sqrt{\frac{\pi m_e}{8 k_B T_e}} \exp\left(\frac{-e\phi_d}{k T_e}\right) \zeta n_n \frac{4\pi \rho_{\bullet} a^3}{3\rho_{dg}} \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{n_n \sigma_{en}} \sqrt{\frac{m_e}{3 k_B T_e}} \cdot \sqrt{\frac{6m_e}{m_n}} \frac{k_B T}{e} n_n \sigma_{en}$$

となる. ここで K_{de} に対し, 基本的に $\phi_d < 0$ であることを用いた. ここで $E = E_{\text{crit}}$ での T_e の値として $T_e \approx 1.5T$ を用い, n_n に $n_n = \rho/m_n$ を用いて式を整理すれば,

$$J(E_{\text{crit}}) = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{\pi m_e}{3}} e \cdot \exp\left(\frac{-2e\phi_d}{3kT}\right) \frac{\zeta}{m_n^{1.5}} \frac{\rho_\bullet a}{f_{dg}}$$

となる. 今考えているような電流密度の減少が大きい設定では $\phi_d \approx -2\langle\epsilon_e\rangle/e$ が $E \lesssim E_{\text{crit}}$ の下で良い近似で成り立つ (Okuzumi & Inutsuka, in prep). また, その $\langle\epsilon_e\rangle$ に $E = E_{\text{crit}}$ の (3.19) の値として $\langle\epsilon_e\rangle \approx 9/4k_B T$ を用いれば,

$$J(E_{\text{crit}}) = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{\pi m_e}{3}} e \exp(3) \cdot \frac{\zeta}{m_n^{1.5}} \frac{\rho_\bullet a}{f_{dg}}$$

となる. ζ は (3.35) を用いて赤道面での議論に限れば,

$$J(E_{\text{crit}}) = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{\pi m_e}{3}} e \exp(3) \cdot \zeta_{CR} \exp\left(-\frac{\Sigma}{192\text{g cm}^{-2}}\right) \frac{1}{m_n^{1.5}} \frac{\rho_\bullet a}{f_{dg}}$$

となる. この式を $m_n = 2\text{amu}$, $a = 0.1\mu\text{m}$, $\rho_\bullet = 3\text{g cm}^{-3}$, $\zeta_{CR} = 10^{-17}\text{s}^{-1}$, $f_{dg} = 0.01$ で規格化を行う. $\exp\left(-\frac{\Sigma}{192\text{g cm}^{-2}}\right)$ は $f_\Sigma = 1$ で, $r = 20\text{AU}$ から $r = 100\text{AU}$ ではほぼ 1 となる. であるので, ここでは r に依存しない定数とみなす. すると各物理量が基準値では $J(E_{\text{crit}}) \approx 1.2 \times 10^{-6}\text{esu cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ となる. ここで数値計算結果を用いて $J(E_{\text{crit}})$ の係数を修正する. 計算結果によれば基準モデルの $r = 70\text{AU}$ において $J(E_{\text{crit}}) = 2.0 \times 10^{-6}\text{esu cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ である. よって,

$$\begin{aligned} J(E_{\text{crit}}) &\approx 2.0 \times 10^{-6} \exp\left(-8.9 \times f_\Sigma \left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-3/2}\right) \\ &\times \left(\frac{\zeta_{CR}}{10^{-17}\text{s}^{-1}}\right) \left(\frac{m_n}{2\text{amu}}\right)^{-1} \left(\frac{\rho_\bullet}{3\text{g cm}^{-3}}\right) \left(\frac{a}{0.1\mu\text{m}}\right) \left(\frac{f_{dg}}{0.01}\right)^{-1} \text{esu cm}^{-2} \text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (3.42)$$

が得られる.

次に (3.41) の右辺について求める. (3.40) の MRI での最大電流密度の式を用いて

赤道面に限り, ρ_c に (3.31) を用いれば,

$$\begin{aligned}
J_{\max} &= 10 \sqrt{\frac{\rho_c}{8\pi}} c \Omega \\
&= \frac{10c}{\sqrt{8\pi}} \sqrt{1.4 \times 10^{-9} \text{ g cm}^{-3}} f_{\Sigma}^{1/2} \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-11/8} \\
&\quad \times \left(\frac{m_{\mu}}{2.34\text{amu}} \right)^{1/4} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}} \right)^{1/4} \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ yr}} \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-3/2} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}} \right)^{1/2} \\
&= 4.5 \times 10^{-1} f_{\Sigma}^{1/2} \left(\frac{r}{1\text{AU}} \right)^{-23/8} \\
&\quad \times \left(\frac{m_{\mu}}{2.34\text{amu}} \right)^{1/4} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}} \right)^{3/4} \text{ esu cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \tag{3.43}
\end{aligned}$$

となる.

以上の $J(E_{\text{crit}}) = J_{\max}$ と, 図 3.6 の基準となるモデルのデッドゾーン半径から非線形オーム則によるデッドゾーン半径を求めれば,

$$\begin{aligned}
r_{\text{NDZ}} &= 72 \left(\frac{\zeta_{CR}}{10^{-17}\text{s}} \right)^{-8/23} \left(\frac{\rho_{\bullet}}{3\text{g cm}^{-3}} \right)^{-8/23} \left(\frac{a}{0.1\mu\text{m}} \right)^{-8/23} \\
&\quad \times f_{\Sigma}^{4/23} \left(\frac{f_{dg}}{0.01} \right)^{8/23} \left(\frac{m_n}{2\text{amu}} \right)^{8/23} \left(\frac{m_{\mu}}{2.34\text{amu}} \right)^{2/23} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}} \right)^{6/23} \text{ AU} \tag{3.44}
\end{aligned}$$

と書ける.

この式が基準モデル以外でも成り立つことを調べる. そのために, f_{dg} , f_{Σ} , M_* , β_c をそれぞれ対数に均等になるようランダムに与えた. 具体的な値は f_{dg} が 10^{-2} から 10^{-4} , f_{Σ} が 10^{-1} から 10^1 , f_{dg} が 10^{-2} から 10^{-4} , M_* が $10^{-2}M_{\odot}$ から $10^2M_{\odot}$, β_c が 10^2 から 10^7 までとった. 数値実験を行った結果, 誤差は 6% 程度に収まった. よって上記のパラメータの範囲で良い近似と言える.

3.3 議論

本節では、本研究によって示唆されうることを議論する。以下は3つの項からなる。1つ目は、電場加熱がダスト同士の合体成長に与える影響について議論する。2つ目は、十分に発達していない電流密度から乱流粘性パラメータ α を見積もる方法について議論する。3つ目は、非線形オーム則に従った MRI の計算手法と今後の研究について述べる。

3.3.1 電子の電場加熱によるダスト間の反発

これまで、原始惑星系円盤では電子のもつエネルギーは電場には依らないとされてきた。しかし、Inutsuka & Sano (2005) において電子は電場によって電場加熱されることが示された。原始惑星系円盤における電場加熱の影響を明らかにするため、MRI の成長による電子の平均運動エネルギーの空間分布をもとめる。具体的には、まず非線形オーム則を用いて電流密度を弱電場から計算する。電流密度が $J_{\max}$ か J_{crit} に達した時、電流密度は定常状態になると仮定して、電子の運動エネルギーを (3.16) を用いて計算した。

図 3.3.1 に、上記の方法で MRI が定常状態まで成長した時の電子の平均エネルギーの空間分布を示す。電場加熱を考慮すると電子の平均エネルギーが 1eV 程度まで高くなる領域が存在する。図 3.6 と対応させると、エネルギーが高くなる領域というのは、非線形オーム則によるデッドゾーンの縁であることがわかる。これは非線形オーム則によって電流密度が下がるために、低電場で $J_{\max}$ に達することができず、より高い電場まで成長できるようになるからである。

原始惑星系円盤の電子の平均エネルギーは、電場加熱によって数 eV までになる領域があることがわかった。電子の運動エネルギーが高いと、電子はそれだけダストに吸着されやすくなるそれによって、電子と中性ガスの温度が同程度のときよりダストは負に帯電する。

原始惑星系円盤においてサブミクロンサイズのダストが互いに衝突し、合体することで微惑星サイズの天体を形成する。ダストが負に帯電すると、ダスト間には静電反

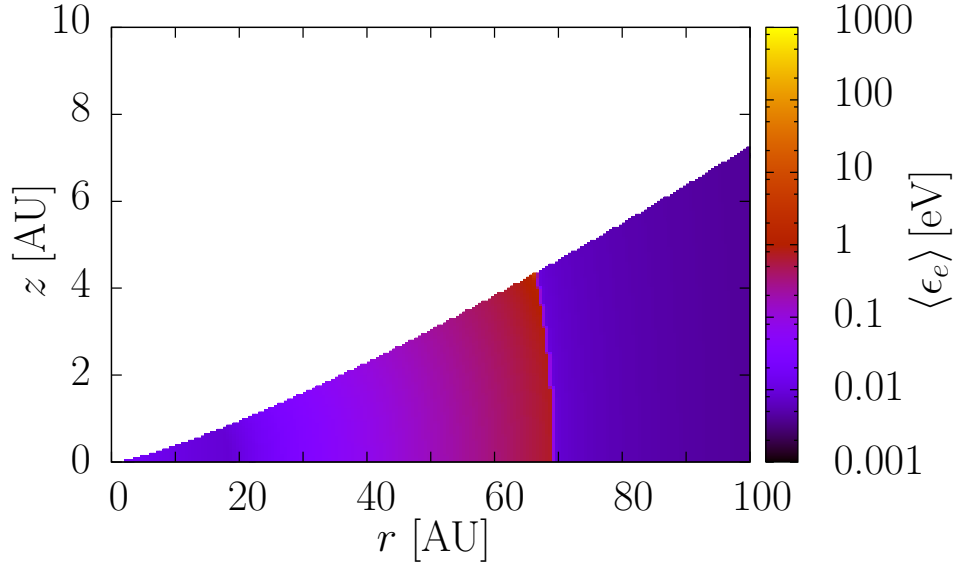


図 3.10 原始惑星系円盤における基準モデルでの電場加熱による平均電子エネルギーへの影響を表した図。上図が電場加熱が起きない原始惑星系円盤の電子のエネルギーの空間分布で、下図が電場加熱と MRI が起きると考えたときの原始惑星系円盤の電子のエネルギーの空間分布である。縦軸は高さ [AU]，横軸は中心星からの距離 [AU]，色軸は MRI が進化した結果としての電子の平均運動エネルギー [eV] を表す。

発力が働く。この斥力はダスト同士の衝突を阻害する。そのため電場加熱が効く領域ではダスト同士は合体成長しにくくなることが示唆される。

原始惑星系円盤においてサブミクロンサイズのダストの運動は、中性ガス粒子のランダムな衝突によってブラウン運動をしていると考えられる。ブラウン運動では中性ガス粒子の平均運動エネルギーとダストの運動エネルギーが平衡に状態にあると考える。そのため、ブラウン運動をするダストの運動エネルギーは $\sim k_B T$ 程度と書ける。また、ダスト同士の衝突時の運動エネルギーも互いにランダムな運動をしていることから $\sim k_B T$ と書ける。

ダスト同士が衝突するには、2つの負に帯電したダストが最接近するときの静電ポテンシャル E_{el} を超すような相対速度のエネルギー E_{el} で衝突しなければならない。ダストの帯電電荷数を Z ，半径が共に a だとすると、 E_{el} は、

$$E_{el} = \frac{e^2 Z^2}{2a} \quad (3.45)$$

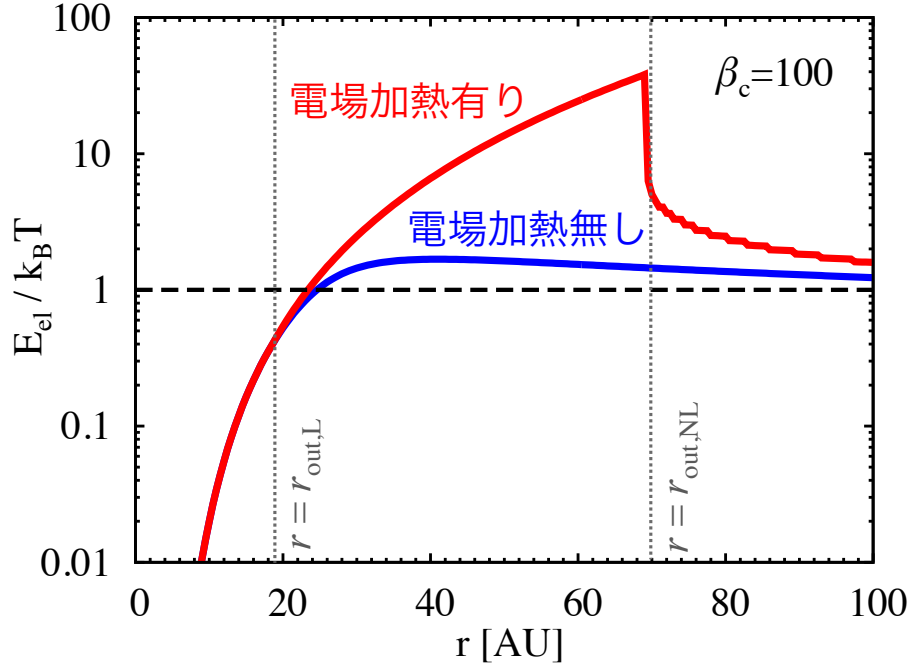


図 3.11 基準モデルにおける赤道面での $E_{el}/k_B T$ の比較. 縦軸は $E_{el}/k_B T$ で, 横軸は中心性からの距離 [AU] である. 赤線は電場加熱があるときで青線が電場加熱がないときである. $r_{out,L} = 19\text{AU}$ の破線は従来のデッドゾーンの外縁半径を表す. $r_{out,NL} = 70\text{AU}$ の破線は非線形オーム則によるデッドゾーンの外縁半径を表す.

と書ける. E_{el} と衝突時の相対運動エネルギーを比較することでダストの合体成長の起きやすさが分かる.

以上より, $E_{el}/k_B T \gtrsim 1$ であればダスト同士の合体成長は起きにくく, $E_{el}/k_B T \lesssim 1$ であればダスト同士の合体成長は起きやすいと言える.

電場加熱によるダストの合体成長を妨害する効果を調べるため, 電場加熱があるときとなないときの赤道面での $E_{el}/k_B T$ の動径方向分布を図 3.11 に載せた. 各パラメータは図 2.9 を描いた時と同じであり, 基準モデルを採用している. 電場加熱が起きないときは 30AU 程度より外側では $E_{el}/k_B T \sim 1$ である. この結果は平均値であるため, 分散を考慮すれば, $E_{el}/k_B T \sim 1$ ではある程度合体成長は起こると考えられる. しかし, 電場加熱が起きると, 加熱電子によって数 10 倍 $E_{el}/k_B T$ が大きくなるので, 分散を考慮しても, ダスト同士の合体成長が難しくなることを示唆している. また非線形オーム則によるデッドゾーンの外縁半径 $r_{out,NL}$ より外側では, 電場加熱がほとんど効かなくなるため, 急激にダストの帯電量が減少している.

以上のことから、非線形オーム則によるデッドゾーンでは、電場加熱によってダスト同士の合体成長が妨げられる可能性がある。

3.3.2 電流密度から α を求める

原始惑星系円盤における乱流の強さを決めるパラメータに α というものがある。これは乱流による応力 W がガス圧 P の α 倍であるとして乱流の強さを表すものである。この α を MRI による電流密度から見積もりたいと思う。

まず MRI によって起こる最大の電流密度 $J_{\max}$ の値を見積もる。元からある磁場 B_0 と MRI によって発達した磁場 δB を用いて磁場を $B = B_0 + \delta B$ と置き、MRI が十分に発達した磁場は $B_0 \ll \delta B$ で実現されるとみなす。十分に成長した MRI で最大成長波数が支配的であるとする。また最大成長波数 k_{MRI} は (2.47) より $k_{\text{MRI}} \approx \Omega/v_A$ と書ける。 v_A は $|B| = \sqrt{B_0^2 + \delta B^2}$ であることを用いると、最大成長波数 k_{MRI} は

$$k_{\text{MRI}} \approx \Omega \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{\sqrt{B_0^2 + \delta B^2}} \quad (3.46)$$

とできる。電流密度 J はアンペールの法則より、(2.14) と書かれる。 $\nabla \times B$ を最大成長波数が支配的であることより $k_{\text{MRI}}\delta B$ とすれば、

$$J \approx \frac{c}{4\pi} k_{\text{MRI}} \delta B \quad (3.47)$$

$$\approx \frac{c}{4\pi} \Omega \sqrt{4\pi\rho} \frac{\delta B}{\sqrt{B_0^2 + \delta B^2}} \quad (3.48)$$

となる。これは $\delta B/\sqrt{B_0^2 + \delta B^2} = 1/\sqrt{1 + B_0^2/\delta B^2}$ として $B_0/\delta B \rightarrow 1$ の極限をとれば、MRI による最大電流密度 $J_{\max}$ は

$$J_{\max}^{(\text{eq})} \approx \sqrt{\frac{\rho}{8\pi}} \Omega c \quad (3.49)$$

と見積もることができる。ここで $J_{\max}$ の (eq) は解析的に見積もった値であることを表す。これは、実際に数値計算を行った結果、(3.40) のようにこれより 10 倍大きい値となる。

MRI が十分に発達し J が $J_{\max}$ に達する前も (3.49) に従うとすると、 $J_{\max}^{(\text{eq})}$ に対す

る J の比 f_J は,

$$f_J \equiv \frac{J}{J_{\max}} \approx \frac{\delta B}{\sqrt{B_0^2 + \delta B^2}} \quad (3.50)$$

と書くことができる。非線形オーム則によるデッドゾーンでは典型的には $f_J \ll 1$ なので,

$$\frac{\delta B}{B_0} \approx f_J \quad (3.51)$$

とできる。

次に MRI によって作られた磁場が原始惑星系円盤に対して与えるトルクを求める。原始惑星系円盤でのトルクとなる応力には分子粘性に起因するものと電磁場に起因するものがある。そして、それぞれレイノルズ応力とマクスウェル応力と呼ばれる。MRI が成長するとき、レイノルズ応力はマクスウェル応力に比べ十分小さく、無視することができる。MRI の磁場は z 方向に垂直なモードが発達する不安定性であるので、電場による寄与を無視すれば、 xy 方向のマクスウェル応力は $W_{xy} = -\langle B_x B_y \rangle / 4\pi$ と書ける。 B_x, B_y 共に $\sim \delta B$ であるとすれば、マクスウェル応力は

$$W_{xy} \sim \frac{\delta B^2}{4\pi} \quad (3.52)$$

と書ける。

α は $W = \alpha P$ に従うので、等温を仮定した状態方程式 (2.4) より、 $\alpha \sim \delta B^2 / 4\pi \rho c_s^2$ となる。ここで (3.51) を用いれば、

$$\alpha \sim \frac{B_0^2}{4\pi \rho c_s^2} f_J^2 \quad (3.53)$$

と表すことができる。 $B_0^2 / 4\pi \rho c_s^2$ は β^{-1} に等しいので最終的に、 α は、

$$\alpha \sim \frac{f_J^2}{\beta_c} \exp\left(\frac{z^2}{2H^2}\right) \quad (3.54)$$

と見積もることができる。この式の適用範囲は $f_J < 1$ なので、非線形オーム則によるデッドゾーンにおいてのみ使うことができる。

図 3.12 は、(3.54) を用いて赤道面における非線形オーム則によるデッドゾーンでの α を計算した図である。各パラメータは図 3.6 を描いたときと同じである。このとき、

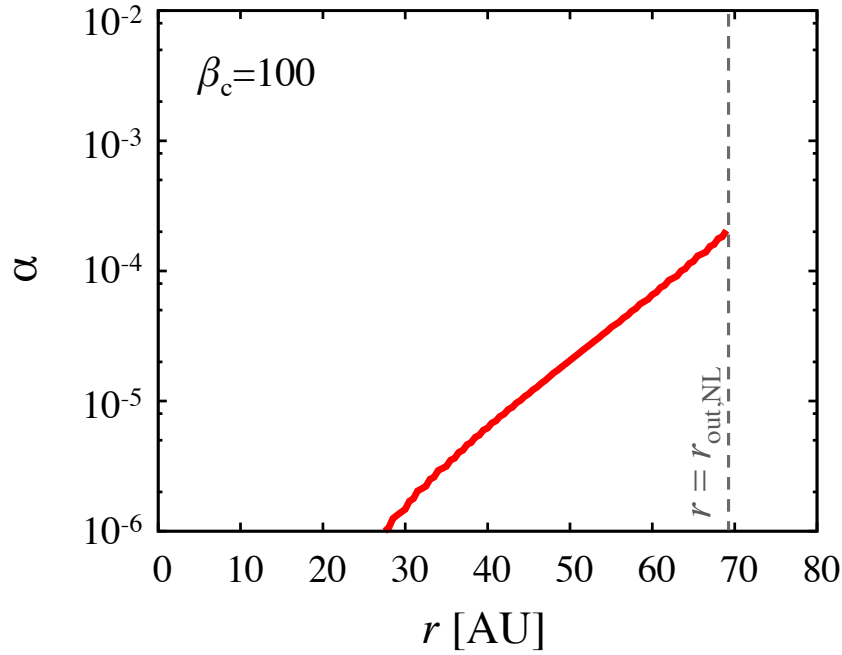


図 3.12 非線形オーム則によるデッドゾーンにおける、 α の赤道面の動径方向分布．各パラメータは図 2.9 を描写した時と同じ，基準モデルを使った．縦軸は乱流粘性パラメータ α ，横軸は中心性からの距離 [AU] である．(3.54) は非線形オーム則によるデッドゾーンにおいてのみ使うことができる．なので， $r_{\text{out,NL}}$ 以降は計算出来ない．

観測から推測される α の値 0.01 よりも少なくとも 2 桁小さい事がわかる．

このようにして非線形オーム則によるデッドゾーンでは乱流粘性パラメータ α の値を見積もることができる．

3.3.3 MHD 計算手法の変更

これまでの MHD の計算には線形のオームの法則を用いている．MHD の計算には誘導方程式という (2.50) で表される式を用いて磁場の時間進化を計算する．この式の導出には通常，ファラデーの法則に対しオームの法則と電場の時間変化を無視しているアンペールの式を用いることで導かれる．その際，オームの法則は $E = J/\sigma_c(J)$ という形で用いることで，電場を含まない形で MHD の計算を行うことができていた．オームの法則が線形であるときには，電流密度と電場が 1 対 1 対応しているため，任意の電流密度から電場を一意に求めることができる．しかし，非線形オーム則は図 2.9

のようにある電流密度に対し、3通りの電場の解を持つような電流密度が存在する。これはつまり、従来の MHD の計算手法が成立しないことを示している。

Okuzumi & Inutsuka (in prep) では、この問題に対し、アンペールの法則に対し電場の時間進化を考慮したマクスウェル–アンペールの式を用いることで、解決できると言っている。なぜなら電場の時間微分の項から、時間進化を追うことができるため、ある電流密度に対し電場の解が複数存在した時は、それまでの電場の値の履歴から解を1つに定めることができるからである。そのような計算はいままでなされておらず、新しい現象がおきる可能性がある。

本研究では、非線形オーム則によってオーム散逸が効く領域を求めたが、その領域は非線形オーム則によって電流密度が減少する領域に等しい。そのような領域では、電流密度が減少する時に電場の解が3つ存在するため、従来の MHD 計算が使えないことを示唆している。今後の研究では、この問題を解決するために電場の時間進化を考慮した MRI のシミュレーションを行う予定である。

第 4 章

結論と今後の課題

本論文で、原始惑星系円盤において、MRI の成長による、電子の電場加熱とそれに伴う電離度減少 (非線形オーム則) が起きる領域を解析した。そのための過程を二段階に分け、研究を行った。第一段階として、電場加熱を考慮した詳細な数値計算を行うために、電子温度の近似的な導出を試みた。電子温度の導出には、電場から受ける力と中性ガス粒子との衝突の微視的な運動から考えた。第二段階として、第一段階で示した式を用いて、MRI の成長による電場加熱領域の位置を調べた。本論文での結果をまとめると以下の通りである。

1. 第一段階で導出した式は電場加熱による電離度の減少を十分な精度で再現することを示した (3.1 節)。これにより、電場加熱及びそれに伴う電気伝導度の減少を多くの問題で考慮することが可能になった。
2. これまで持続的な磁気乱流が起きると考えられていた場所で、MRI の成長により電場加熱が起き、結果として電気伝導度が減少することを発見した (3.2 節)。数値計算の結果によれば、ダストサイズ $0.1\mu\text{m}$ 、ダストガス質量比 0.01 の最小質量円盤では、20AU まで及ぶ従来のデッドゾーンより外側に、電場加熱が起きる領域が 70AU まで広がる (図 3.6)。この領域では、電場加熱に伴い電気伝導度が減少するため、激しい乱流は起きないことが示唆される (図 3.12)。また、電場加熱によるダスト帯電により、ダスト同士の合体成長が阻害されることも示唆された (図 3.11)。

非線形オーム則に従った MRI の時間進化の仕方は分かっておらず，これまでの MRI とは異なった振る舞いをする可能性がある．そのため，今後の研究では，この問題を解決するために電場の時間進化を考慮した MRI のシミュレーションを行う予定である．

本研究によって，原始惑星系円盤における MRI では，電場加熱の効果が重要であることが示された．特に，微惑星形成に大きな影響を与えうる．本研究で示した諸公式を用いて詳細な数値計算を行うことで，定量的な影響が明らかになることが期待される．

謝辞

学部課程における研究活動および本論文の執筆にあたり，地球惑星科学専攻の奥住聡助教には適切で丁寧な指導および数多くの議論をしていただきました。心よりの謝意を表します。また，セミナー等を通じて様々な助言をいただきました地球生命研究所の井田茂教授に感謝いたします。地球惑星科学専攻の先輩方には研究生生活において何から何まで指導をしていただきました，ありがとうございます。特に，地球惑星科学専攻の伊藤祐一先輩には，本論文および発表スライドの懇切丁寧な修正をしていただきましたことを感謝いたします。同期の植田高啓君，芝池愉人君には学部課程を通じて様々な場面でお世話になりました。この場を借りて感謝の意を表します。

参考文献

- Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1991, ApJ, 376, 214
- . 1998, Reviews of Modern Physics, 70, 1
- Chandrasekhar, S. 1961, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Dover Books)
- Chen, F. F. 1977, INTRODUCTION TO PLASMA PHYSICS 『プラズマ物理入門』, ed. 内田岱二郎 (丸善株式会社)
- Davydov, B. 1935, Sowjet.
- Frost, L. S., & Phelps, A. V. 1962, Physical Review, 127, 1621
- Gammie, C. F. 1996, ApJ, 457, 355
- Ganguli, B., Biondi, M. A., Johnsen, R., & Dulaney, J. L. 1988, Phys. Rev. A, 37, 2543
- Hayashi, C. 1981, Progress of Theoretical Physics Supplement, 70, 35
- Hershey, A. V. 1939, Physical Review, 56, 916
- Inutsuka, S.-i., & Sano, T. 2005, ApJ, 628, L155
- Johansen, A. 2009, Lecture notes on the magnetorotational instability
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. 1953, Physical Kinetics (New York: Pergamon)
- Mayor, M., & Queloz, D. 1995, Nature, 378, 355
- Muranushi, T., Okuzumi, S., & Inutsuka, S.-i. 2012, ApJ, 760, 56
- Okabe, Y. 1997, <http://www.moge.org/okabe/temp/elemag/temp.html>
- Okuzumi, S., & Inutsuka, S.-I. in prep
- Okuzumi, S., Tanaka, H., & Sakagami, M.-a. 2009, ApJ, 707, 1247

- Osterbrock, D. E. 1961, ApJ, 134, 270
- Sano, T., & Miyama, S. M. 1999, ApJ, 515, 776
- Sano, T., Miyama, S. M., Umebayashi, T., & Nakano, T. 2000, ApJ, 543, 486
- Spitzer, Jr., L. 1941, ApJ, 93, 369
- Umebayashi, T., & Nakano, T. 1981, PASJ, 33, 617
- Velikhov, E. P. 1959, JETP
- Wannier, G. H. 1943, Bell system tech
- Yoon, J.-S., Song, M.-Y., Han, J.-M., et al. 2008, Journal of Physical and Chemical
Reference Data, 37, 913

Appendix

A.1 cgs ガウス単位系と MKSA 単位系の違い

本論文の物理量は cgs ガウス単位系を用いている．ここでは cgs ガウス単位系と MKSA 単位系の違いを紹介する．この Appendix は Okabe (1997) を元にした．

MKSA 単位系とは，長さ，質量，時間の次元に m, kg, s を，電磁気を表す基本単位として電流の単位を A を採用した単位系のことである．cgs ガウス単位系は長さ，質量，時間の次元に cm, g, s を採用し，電磁気を表す際は既存の 3 つの基本単位を用いて表す単位系のことである．cgs 単位系では力の単位は dyn ($1\text{dyn} = \text{g cm s}^{-2}$) を用いる．従って $1\text{dyn} = 10^{-5}N$ である．ガウス単位系は電気を表す単位には静電単位 esu を，磁気を表す単位には電磁単位 emu を用いる．また，真空の誘電率 ε_0 および真空の透磁率 μ_0 を無次元の 1 であるとし，電磁気の方程式系が対象になるように組み立てられている．

静電単位系はクーロンの法則に係数が含まれないように電荷の単位を定義する．つまり， r は離れた電荷 q_1 が電荷 q_2 に及ぼす力は，

$$F_E = \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{A.1.1})$$

と記述さる．そのため静電単位系の単位 esu は $\text{esu} = \text{dyn}^{1/2} \text{cm}$ となる．

真空の誘電率 ε_0 および真空の透磁率 μ_0 を 1 であるとしているため，cgs ガウス単位系における電場 $\boldsymbol{E}$ ・電束密度 $\boldsymbol{D}$ ，磁場 $\boldsymbol{H}$ ・磁束密度 $\boldsymbol{B}$ 間の変換は，

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} , \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} \quad (\text{A.1.2})$$

で行われる。

式の対称性とマクスウェル方程式は以下のように書ける。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e \quad (\text{A.1.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = c\nabla \times \mathbf{E} \quad (\text{A.1.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\nabla \times \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J} \quad (\text{A.1.6})$$

ρ_e は電荷密度である。ここで c は cgs 単位系で表した際の光速の値 $c = 3 \times 10^{10}$ である。

A.2 ダスト-荷電粒子衝突断面積

この Appendix ではダストと荷電粒子が衝突する際の衝突断面積を求める。衝突断面積とは、2 粒子の衝突のおきやすさを面積を用いて表したものである。例えば 2 粒子が衝突する際、ある粒子と同じ運動をする系から見たときに、ある半径以内から向かってくる他の粒子は全て衝突してしまう。そのような半径から円の面積を求めたものが衝突断面積である。ここでは、主に帯電しているダストに無限遠方からやってくる荷電粒子との衝突断面積を求める。

半径 a で電荷 q_d を帯びた球状のダストに無限遠方で速度 v_∞ を持った質量 m_α 、電荷 q_α の荷電粒子が向かってくる場合を考える。また、荷電粒子の半径はダストの半径に比べ十分小さいとする。ここで、衝突断面積の半径を b とする。 b はダストの中心を通る荷電粒子の速度方向に平行な軸からの距離を表す。その軸と b だけ離れた位置からやってくる荷電粒子はダストと衝突する際にちょうど速度方向がダスト表面に接する。また、その衝突時の速度を v_∞ とする。これらを表した概念図を図 A.2.1 に載せた。

今ダストと荷電粒子間に働く力は中心力のクーロン力のみである。一般に中心力が働く 2 粒子に対しては、空間の等方性から角運動量保存が成り立つ。また、外力がないので 2 粒子のエネルギーの和が保存する。具体的には粒子の運動エネルギーの和

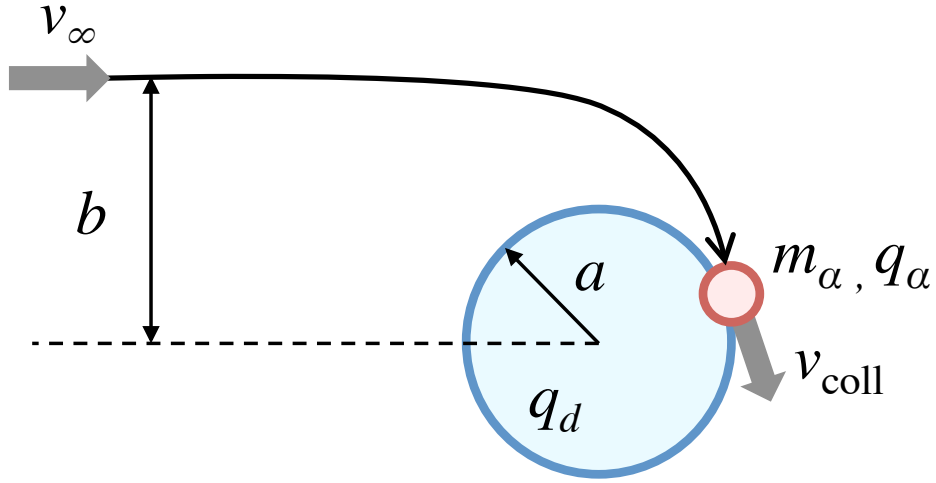


図 A.2.1 クーロン力による荷電粒子のダストへの衝突を表した概念図.

と 2 粒子間のポテンシャルエネルギーが保存する. この 2 つの保存則から衝突断面積を求めることにする. 従って用いる式は,

$$m_{\alpha} v_{\infty} b = m_{\alpha} v_{\text{coll}} a \quad (\text{A.2.7})$$

$$\frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\infty}^2 = \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\text{coll}}^2 + \frac{q_{\alpha} q_d}{a} \quad (\text{A.2.8})$$

である. 両式から v_{coll} を消去すれば b は

$$b = \sqrt{a^2 - 2 \frac{q_{\alpha} q_d a}{m_{\alpha} v_{\infty}^2}} \quad (\text{A.2.9})$$

となる. ダストの帯電電荷量 q_d はダスト表面のポテンシャル ϕ_d と関係付けられ, 2 粒子の相互作用のみを考えれば良いときには, $q_d = a \phi_d$ とできる. 以下は q_d の代わりに ϕ_d を用いて表す. 衝突断面積 $\sigma_{d\alpha}$ は半径 b の円の面積であるので,

$$\sigma_{d\alpha} = \pi a^2 \left(1 - 2 \frac{q_{\alpha} \phi_d}{m_{\alpha} v_{\infty}^2} \right) \quad (\text{A.2.10})$$

となる. ここで πa^2 はダストの投影面積であり, ダストと荷電粒子の間に力が働かないとき, その衝突断面積は投影面積に等しい. そのためダストが帯電しているとき, $(1 - 2q_{\alpha} \phi_d / m_{\alpha} v_{\infty}^2)$ はクーロン力によって変化する 2 粒子の衝突のしやすさを表して

いる．また， $2q_\alpha\phi_d/m_\alpha v_\infty^2$ は荷電粒子の運動エネルギーに対するポテンシャルエネルギーの比になっている．

2粒子間に引力が働くとき， $q_\alpha\phi_d$ は負であり衝突断面積は大きくなる．一方，2粒子間に斥力が働くとき， $q_\alpha\phi_d$ は正であり衝突断面積は小さくなる．このとき， $q_\alpha\phi_d$ が十分大きくなると衝突断面積が0になるような v_∞ が存在する．その速度以下では荷電粒子は衝突することができない．この最小衝突速度 $v_{\min}$ は，

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2q_\alpha\phi_d}{m_\alpha}} \quad (\text{A.2.11})$$

と表せられる．

A.3 2粒子の弾性衝突による運動量変化と運動エネルギー変化

この Appendix では，2粒子の弾性衝突による速度変化および運動エネルギーの変化を求める．

位置 $\mathbf{r}_1$ にいる質量 m_1 ，速度 $\mathbf{v}_1$ の粒子1と位置 $\mathbf{r}_2$ にいる質量 m_2 ，速度 $\mathbf{v}_2$ の粒子2が衝突するときを考える．このとき，2粒子間に衝突以外の相互作用は無視できるとする．また，弾性衝突を考えるので，粒子は並進運動のエネルギーしか持たない．衝突後の物理量には'をつけて表す．今2粒子に働く外力がないので，運動量保存が成り立つ．またラグランジアンが時間に陽に依存しないので，エネルギー保存が成り立つ．

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2 \quad (\text{A.3.12})$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 \quad (\text{A.3.13})$$

これらの物理量は全てある静止座標系から見た物理量であるが，衝突現象をよく理解するために重心座標系と相対座標を導入する．また重心系に関する物理量には $\hat{}$ をつけて表す．重心座標系とはある系の重心から観測しているような系で，一般に重心の原点は静止座標に対し重心速度 $\mathbf{V}_G$ で運動する．重心速度は重心座標の時間微分から

求められ,

$$\mathbf{V}_G = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{A.3.14})$$

となる．相対座標とはある片方の粒子に対する別の粒子の位置である．相対座標を $\mathbf{r}_r$ とすると $\mathbf{r}_r = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ と書ける．また，相対座標の時間変化率は相対速度と呼ばれ $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ と書ける．これらの物理量を用いれば，粒子 1，2 の重心座標系から見た衝突前と後の速度は，

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_r, \quad (\text{A.3.15a})$$

$$\hat{\mathbf{v}}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_r, \quad (\text{A.3.15b})$$

$$\hat{\mathbf{v}}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}'_r, \quad (\text{A.3.15c})$$

$$\hat{\mathbf{v}}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}'_r \quad (\text{A.3.15d})$$

となる．相対速度および相対位置はニュートン力学においては座標系に依らないので，ここでは単に $\mathbf{v}_r, \mathbf{r}_r$ と記述する．エネルギー保存 (A.3.13) の各速度に (A.3.15) を用いれば，

$$|\mathbf{v}_r| = |\mathbf{v}'_r| \quad (\text{A.3.16})$$

が成り立つ．つまり相対速度の絶対値は衝突の前後で変化しないことを表している．また，重心座標系から見た，ある時刻における 2 粒子の運動量の和は常に 0 であることが (A.3.15) から明らかである．衝突前後の速度差を静止座標系から重心座標系に変換すると，

$$\Delta \mathbf{v} = (\hat{\mathbf{v}}' + \mathbf{V}_G) - (\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{V}_G) = \Delta \hat{\mathbf{v}} \quad (\text{A.3.17})$$

となり，衝突前後の速度差は座標系に依らない．従って以下は衝突前後の速度差は座標系による区別をしない．

粒子1の衝突後の速度差 $\Delta \mathbf{v}_1$ は (A.3.15) の関係を用いれば,

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}'_r - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_r \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}'_r - \mathbf{v}_r)\end{aligned}\tag{A.3.18}$$

である. ここで, $\mathbf{v}_r$ に平行な単位ベクトルを $\mathbf{e}_\parallel$ としこれに垂直な単位ベクトルを $\mathbf{e}_\perp$ とする. また $\mathbf{v}_r$ と $\mathbf{v}'_r$ の成す角を θ とすれば, $\Delta \mathbf{v}_1$ は,

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v'_r \cos \theta \mathbf{e}_\parallel + v'_r \sin \theta \mathbf{e}_\perp - v_r \mathbf{e}_\parallel) \\ &= \frac{m_2 v_r}{m_1 + m_2} ((\cos \theta - 1) \mathbf{e}_\parallel + \sin \theta \mathbf{e}_\perp)\end{aligned}\tag{A.3.19}$$

である.

次に運動エネルギーの衝突による変化についてみてゆく. 重心座標系の量に変換し, 計算すれば,

$$\begin{aligned}\Delta \epsilon_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\hat{\mathbf{v}}'_1 + \mathbf{V}_G)_1^2 - \frac{1}{2} m_1 (\hat{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{V}_G)_1^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \hat{v}_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 \hat{v}_1^2 + m_1 \mathbf{V}_G \cdot \hat{\mathbf{v}}'_1 - m_1 \mathbf{V}_G \cdot \hat{\mathbf{v}}_1 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v_r'^2 - \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v_r^2 + m_1 \mathbf{V}_G \cdot (\hat{\mathbf{v}}'_1 - \hat{\mathbf{v}}_1) \\ &= m_1 \mathbf{V}_G \cdot \Delta \mathbf{v}_1\end{aligned}\tag{A.3.20}$$

となる.

以上が特定の2粒子に関する, 衝突前後の速度と運動エネルギーの変化である. しかし, これらの式には今考えている系からは与えることのできないパラメータである θ が含まれている. θ を与えるのは一般に困難である. 従って以下では, 重心座標系で見たときに, 衝突によって粒子が散乱する方向は全ての方向にその確率は等しいとする. つまり等方的な散乱を考える. (A.3.21) と (A.3) を全立体角に関して積分し, その平均を求める. $\mathbf{e}_\perp$ が立体角方向に依存することに注意すれば, $\Delta \mathbf{v}_1$ の立体角平

均は,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \int \Delta \mathbf{v}_1 d\Omega &= \frac{m_2 v_r}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{4\pi} \mathbf{e}_{\parallel} \int (\cos \theta - 1) d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int \sin \theta \mathbf{e}_{\perp} d\Omega \right) \\
&= \frac{m_2 v_r}{2(m_1 + m_2)} \mathbf{e}_{\parallel} \int_0^{\pi} (\cos \theta - 1) \sin \theta d\theta \\
&= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_r \\
&= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)
\end{aligned} \tag{A.3.21}$$

となる.

同様に, $\Delta \epsilon_1$ の立体角平均を行う. 衝突による散乱角に重心速度は依存しないことに注意し, (A.3.21) を用いれば,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \int \Delta \epsilon_1 d\Omega &= m_1 \mathbf{V}_G \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int \Delta \mathbf{v}_1 d\Omega \right) \\
&= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{V}_G \cdot \mathbf{v}_r \\
&= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2 - (m_1 - m_2) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \\
&= \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \frac{1}{2} (m_1 - m_2) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \right)
\end{aligned} \tag{A.3.22}$$

となる.