

# 常微分方程式の数値解法

## 1階常微分方程式

$$\frac{d}{dt} y(t) = f(t, y), \quad y(t=0) = a$$

を解くことを考える。

t=0での境界条件を与えているので、解は一意に定まる。微分方程式をy(t)の時間(t)発展の式と考えれば、初期条件を与えていることになるので、初期値問題と呼ぶ。

これを数値的に解く。

# オイラー法

$$\frac{d}{dt} y(t) = f(t, y), \quad y(t=0) = a$$

微分を $\Delta t$ の1次精度で近似する。

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = f(t, y)$$



$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t f(t, y(t))$$

$$y(\Delta t) = y(0) + \Delta t f(0, y(0)) = a$$

$$y(2\Delta t) = y(\Delta t) + \Delta t f(\Delta t, y(\Delta t))$$

$$y(3\Delta t) = y(2\Delta t) + \Delta t f(2\Delta t, y(2\Delta t))$$

...

t=0から順次数値的にy(t)を求めることができる！

# オイラー法の例

$$\frac{d}{dt} y(t) = y(t), \quad y(t=0) = 1 \quad \text{厳密解は} \quad y(t) = \exp(t)$$

$$y(\Delta t) = 1 + \Delta t$$

$$y(2\Delta t) = (1 + \Delta t) + \Delta t(1 + \Delta t) = (1 + \Delta t)^2$$

$$y(3\Delta t) = (1 + \Delta t)^2 + \Delta t(1 + \Delta t)^2 = (1 + \Delta t)^3$$

...

$$y(n\Delta t) = (1 + \Delta t)^{n-1} + \Delta t(1 + \Delta t)^{n-1} = (1 + \Delta t)^n$$

区間 $[0, T]$ を $n$ 等分すると、 $\Delta t = T/n$ より

$$y(T) = \left(1 + \frac{T}{n}\right)^n \longrightarrow n \rightarrow \infty (\Delta t \rightarrow 0) \text{の時, } y(T) = \exp(T)$$

# 精度の向上

## 微分をテイラー展開

$$\begin{aligned}y(t + \Delta t) &= y(t) + \Delta t y'(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 y''(t) + \frac{1}{6} \Delta t^3 y'''(t) + \dots \\&= y(t) + \Delta t \left\{ y'(t) + \frac{1}{2} \Delta t y''(t) + \frac{1}{6} \Delta t^2 y'''(t) + \dots \right\} \\&= y(t) + \Delta t \left\{ f(t, y) + \frac{1}{2} \Delta t \frac{df(t, y)}{dt} + \frac{1}{6} \Delta t^2 \frac{d^2 f(t, y)}{dt^2} + \dots \right\}\end{aligned}$$

---

ここで打ち切ればオイラー法

## 精度の向上(2)

2次の項まで残すことを考える

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \left\{ f(t, y) + \frac{1}{2} \Delta t \frac{df(t, y)}{dt} + O(\Delta t^2) \right\}$$

$$\frac{df(t, y)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = f_t + f_y f \quad \text{より}$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \left\{ f(t, y) + \frac{1}{2} \Delta t (f_t + f_y f) \right\}$$

$f_t, f_y$  をどのように評価するか？

## 精度の向上(3)

$f + \frac{1}{2} \Delta t (f_t + f_y f)$  をどのように近似するか？

$t$ から少し離れた点、 $t+(p\Delta t)$ における  $y$  の値は、 $y+(p\Delta t) f(t,y)$  に近い。  
なので、その値を  $y+(q\Delta t) f(t,y)$  とおく。 $f$  をテーラー展開して評価する。

$$\begin{aligned} & f(t + (p\Delta t), y + (q\Delta t) f) \\ &= f(t, y) + (p\Delta t) f_t + (q\Delta t) f f_y + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

適当な定数  $r, s$  を用いて  $\frac{1}{2} \Delta t (f_t + f_y f)$  を近似

$$\begin{aligned} & r f(t, y) + s f(t + (p\Delta t), y + (q\Delta t) f) \\ &= (r + s) f(t, y) + s(p\Delta t) f_t + s(q\Delta t) f f_y + O(\Delta t^2) \\ &= f + \frac{1}{2} \Delta t f_t + \frac{1}{2} \Delta t f f_y \end{aligned}$$

# 精度の向上(4)、ホイン法

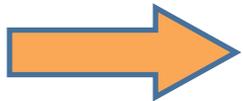
結局、 $r + s = 1, sp = \frac{1}{2}, sq = \frac{1}{2}$

をみたく  $r, s, p, q$  を選べば、 $\Delta t$  の1次の精度で偏微分項が近似できる。

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \left\{ r f(t, y) + s f(t + (p\Delta t), y + (q\Delta t)f) \right\}$$

$r = \frac{1}{2}, s = \frac{1}{2}, p = 1, q = 1$  を選んだ場合をホイン法と呼ぶ。

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{\Delta t}{2} \left\{ f(t, y) + f(t + \Delta t, y + \Delta t f) \right\}$$



$$s_1 = f(t_n, y_n), s_2 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t s_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} (s_1 + s_2)$$

# 4次のルンゲクッタ法

ホイン法と同様な手順でテイラー展開の4次の項までを残した場合に得られる公式を4次のルンゲクッタ法という。

13個の未知数に対する、11個の方程式になるので、4次の項まで残す係数はいろいろあるが、係数が簡単になるものが選ばれている。

$$s_1 = f(t_n, y_n)$$

$$s_2 = f(t_n + \Delta t / 2, y_n + \Delta t s_1 / 2)$$

$$s_3 = f(t_n + \Delta t / 2, y_n + \Delta t s_2 / 2)$$

$$s_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t s_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} (s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4)$$

# 予測子・修正子法

$t$  を  $t=t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots$  と  $\Delta t$  間隔で離散化  
 $t_{n+1}$  を  $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-k}$  の多点を使って精度を向上させる。

区間  $[t_{n-k}, t_{n+1}]$  で微分方程式を積分する。

$$\int_{t_{n-k}}^{t_{n+1}} \frac{dy}{dt} dt = y_{n+1} - y_{n-k} = \int_{t_{n-k}}^{t_{n+1}} f(t, y) dt$$

$k=0$  の場合、 $t_n, t_{n+1}$  を用いて、積分を台形公式で近似

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt = \frac{\Delta t}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$$

## 予測子・修正子法(2)

k=0の場合、 $t_n, t_{n+1}$ を用いて、積分を台形公式で近似

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt = \frac{\Delta t}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$$

$y_{n+1}$  が未知のままなので、これを別の式で“予測”する。

$$y_{n+1}^* = y_n + \Delta t f(t_n, y_n)$$

予測子

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^*) \right\}$$

修正子

オイラー法で予測をし、その値を使って後に修正する。

## 予測子・修正子法(3)

k=1の場合、 $t_{n-1}$ ,  $t_n$ ,  $t_{n+1}$ を用いて、  
積分をシンプソン公式で近似

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(t, y) dt = \frac{\Delta t}{3} (f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 4f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$$

$$y_{n+1}^* = y_{n-3} + \frac{4\Delta t}{3} \{2f(t_{n-2}, y_{n-2}) - f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 2f(t_n, y_n)\}$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{\Delta t}{3} \{f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 4f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)\}$$

ミルン法

# アダムス・バッシュフォース法

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt$$

区間  $[t_n, t_{n+1}]$  で  $f(t, y)$  を多項式近似して積分する。

2点  $t_{n-1}, t_n$  を用いて、1次直線で外挿する。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} \{3f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\}$$

3点  $t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$  を用いて、2次曲線で外挿する。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{12} \{23f(t_n, y_n) - 16f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, y_{n-2})\}$$

# 高階微分方程式

高階常微分方程式

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)$$

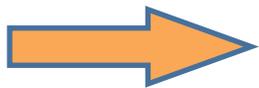
はn元の連立1階常微分方程式に帰着できる。

$$\frac{dy_1}{dt} = f(t, y_1, \dots, y_{n-1})$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1, \dots, \frac{dy_n}{dt} = y_{n-1}$$

例) 運動方程式

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}$$



$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}$$