

微分方程式の境界値問題 (1)

- 初期値問題が独立変数のある1点の値が与えられるのに対して, 境界値問題は独立変数の全ての端点の値が与えられる.
- 例えば1次元の線形2階常微分方程式の場合は, 次のように定義できる.

$$\star \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} y(x) = y(x) p(x) + q(x) \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$$

微分方程式の境界値問題 (2)

- ☆の式をこれまでと同様に「差分化」する.
- x を N 区間に分割して, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ の $N+1$ 格子点で近似解を求める. この時, $\Delta x = (\alpha - \beta)/N$.

$$\begin{cases} \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{\Delta x^2} = y(x_i) p(x_i) + q(x_i), \\ y(x_0) = \alpha, y(x_N) = \beta \end{cases},$$

$(i = 1, \dots, N-1)$

微分方程式の境界値問題 (3)

- 差分化した式を行列形式で書くと...

$$\begin{pmatrix} -2-p_1\Delta x^2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2-p_2\Delta x^2 & & 1 & & & & \\ & \ddots & & \ddots & & & & \\ & & 1 & -2-p_{i-1}\Delta x^2 & & 1 & & \\ & & & 1 & -2-p_i\Delta x^2 & & 1 & \\ & & & & 1 & -2-p_{i+1}\Delta x^2 & & \\ & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & 0 & & & & & 1 & -2-p_{N-1}\Delta x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ \dots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1\Delta x^2 - \alpha \\ q_2\Delta x^2 \\ \dots \\ q_{i-1}\Delta x^2 \\ q_i\Delta x^2 \\ q_{i+1}\Delta x^2 \\ \dots \\ q_{N-1}\Delta x^2 - \beta \end{pmatrix}$$

($i=i,...,N-1$)

- $y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$ の $N-1$ 個の未知数に対して $N-1$ 本の連立一次方程式を数値的に解けば, ☆の境界値問題の近似解を一意に求めることができる.

微分方程式の境界値問題 (4)

- 2次元の偏微分方程式の例として次のポアソン方程式を考える.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \phi(x, y) = \rho(x, y) \\ \rho(0, y) = \rho(L, y) = \rho(x, 0) = \rho(x, L) = 0 \end{array} \right.$$

- 1次元の場合と同様に x, y をそれぞれ N 個の区間に分割し, $(N+1) \times (N+1)$ 個の格子点を定義し, 格子点上の近似解を求める.

微分方程式の境界値問題 (5)

- 差分式は次のようになる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} = \rho_{i,j} \\ \rho_{0,j} = \rho_{L,j} = \rho_{i,0} = \rho_{i,L} = 0 \end{array} \right.$$

- $\Delta x = \Delta y$ の場合は式が少し簡単にできて...

$$\frac{-4\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1}}{\Delta x^2} = \rho_{i,j}$$

- 結局, 先の例と同様に連立一次方程式に帰着できる.

連立一次方程式を反復解法で解く(1)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2N}x_N = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3N}x_N = b_3$$

...

$$a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \cdots + a_{NN}x_N = b_N$$

を i 番目の式について, $\{x_i, i=1, \dots, N\}$ を解く.

連立一次方程式を反復解法で解く(2)

$$x_1^{(1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + \cdots + a_{1N}x_N^{(0)}) / a_{11}$$

$$x_2^{(1)} = (b_2 - a_{13}x_3^{(0)} + a_{14}x_4^{(0)} + \cdots + a_{1N}x_N^{(0)}) / a_{22}$$

$$x_3^{(1)} = (b_3 - a_{12}x_2^{(0)} + a_{14}x_4^{(0)} + \cdots + a_{1N}x_N^{(0)}) / a_{33}$$

...

$$x_N^{(1)} = (b_N - a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + \cdots + a_{1N-1}x_{N-1}^{(0)}) / a_{NN}$$

を i 番目の式について, x_i を解く.

これを $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s)}$ と反復し, $\{x_i^{(s)}\}$ と $\{x_i^{(s+1)}\}$ の差分が十分な精度で小さくなり, $\{x_i, i=1, \dots, N\}$ が収束した値を近似解とする. (ヤコビ法 収束性を改善したガウス・ザイデル法やSOR法へ簡単に拡張できる.)