偏微分方程式の解法

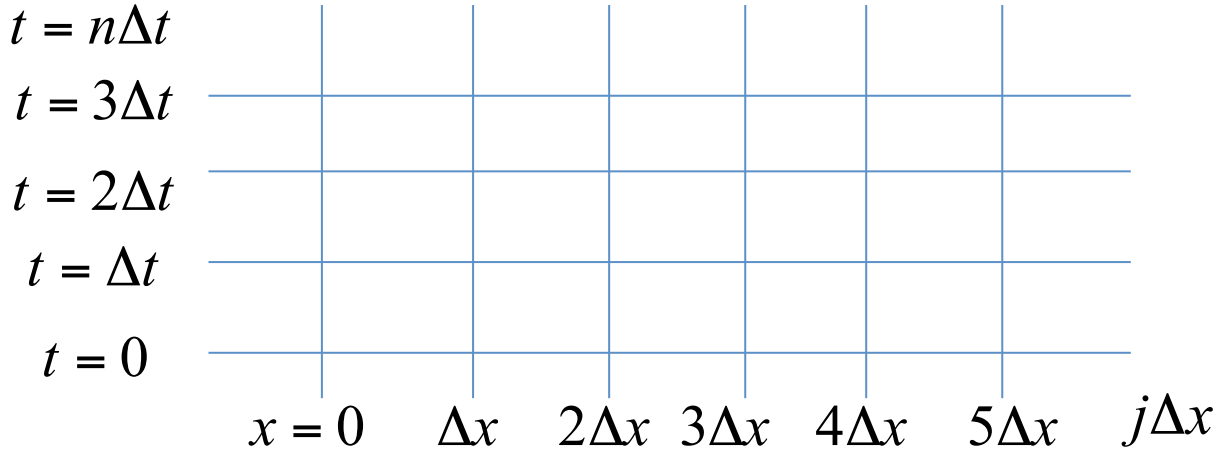
移流方程式の差分化

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0,\ u(x,t=0) = f(x)$$ を数値的に解く。

解は $$u(x,t) = f(x-ct)$$

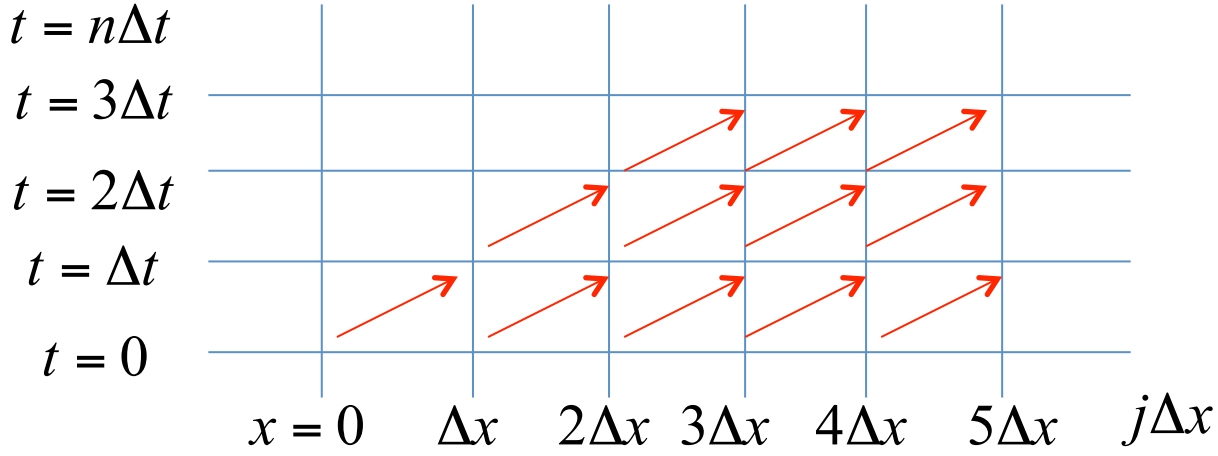
差分化すると $$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} + c\frac{u(x,t) - u(x-\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

これを格子点上で解いていく



偏微分方程式の解法

移流方程式の差分化



$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \longrightarrow \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right)$$

左から右へ、順番に値が決まっていく。
（左からくる）情報が（右へ）伝播していく。

ノイマンの安定性解析

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+c\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}=0$$

の1つの特解として　$u_j^n=g^n\exp[i\theta\, j\Delta x]$　を考える。

$$u_j^{n+1}=g^{n+1}\exp[i\theta\, j\Delta x]=gu_j^n$$

$$u_{j-1}^n=g^n\exp[i\theta\,(j-1)\Delta x]=u_j^n\exp[-i\theta\Delta x]$$　から

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)\longrightarrow gu_j^{n+1}=u_j^n\left(1-\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(1-\exp[-i\theta\Delta x]\right)\right)$$

$$g=1-\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(1-\exp[-i\theta\Delta x]\right)$$

$\frac{c\Delta t}{\Delta x}>1$ の時には $|g|>1$ で、解が発散する。（不安定）

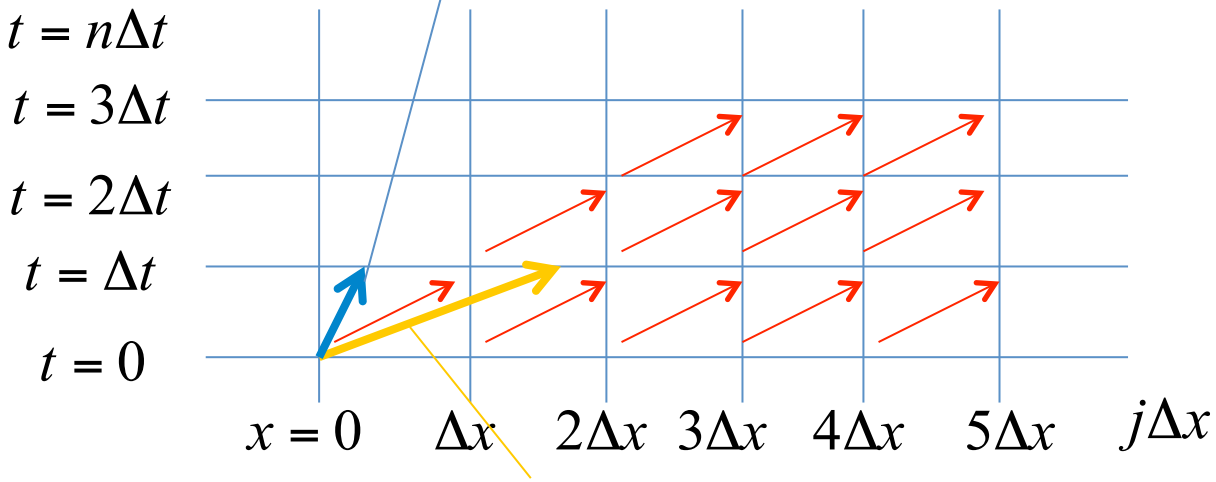
CFL条件

前の解析から $\frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$ が安定に解くための必要条件であることがわかる。

$\frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$

移流速度c で伝わる情報を

十分に分解できる格子間隔 ○



$\frac{c\Delta t}{\Delta x} > 1$

移流速度c で、情報が格子間隔を

超えて伝わってしまう ×

ノイマンの安定性解析： 別の例

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+c\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}=0$$

空間微分を中心差分にする。

$$u_j^{n+1}=g^{n+1}\exp[i\theta\, j\Delta x]=gu_j^n$$

$$u_{j-1}^n=g^n\exp[i\theta(j-1)\Delta x]=u_j^n\exp[-i\theta\Delta x]$$

$$u_{j+1}^n=g^n\exp[i\theta(j+1)\Delta x]=u_j^n\exp[+i\theta\Delta x]$$

から

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)\longrightarrow gu_j^{n+1}=u_j^n\left(1-\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(\exp[i\theta\Delta x]-\exp[-i\theta\Delta x]\right)\right)$$

$$g=1+i\frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin(\theta\Delta x),\quad |g|=\left(1+\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2(\theta\Delta x)\right)^{1/2}>1$$

$\frac{c\Delta t}{\Delta x}$によらず常に解が発散する。（不安定）