Runge-Kutta法で物理現象を解く

堀　安範 (D2)

東京工業大学 地球惑星科学専攻
井田研究室

2008年 後期　数値地球惑星科学演習 (11/20)

概要

1. Runge-Kutta法で解ける物理現象の例
2. 二重振り子とは?
3. 解くべき微分方程式
4. 数値計算コード
5. 結果
6. まとめ

$Appendix$ 1 --- プログラムの使い方

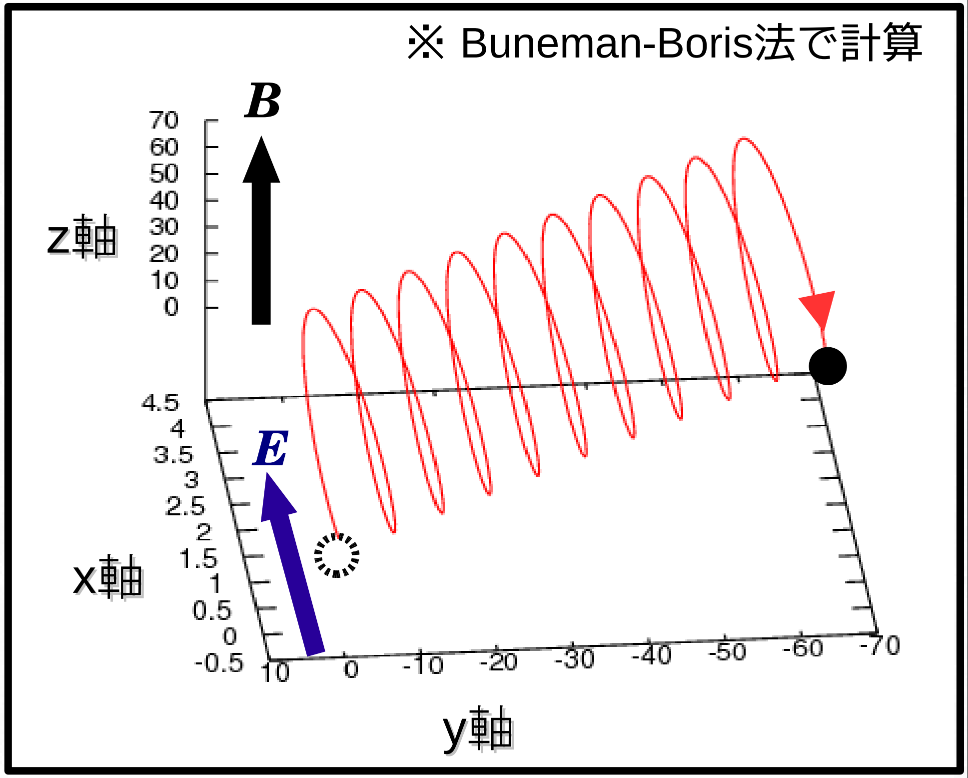
$Appendix$ 2 --- 可視化の方法

1. Runge-Kutta法で解ける物理現象

■ 磁場・電場中での荷電粒子の運動

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$$

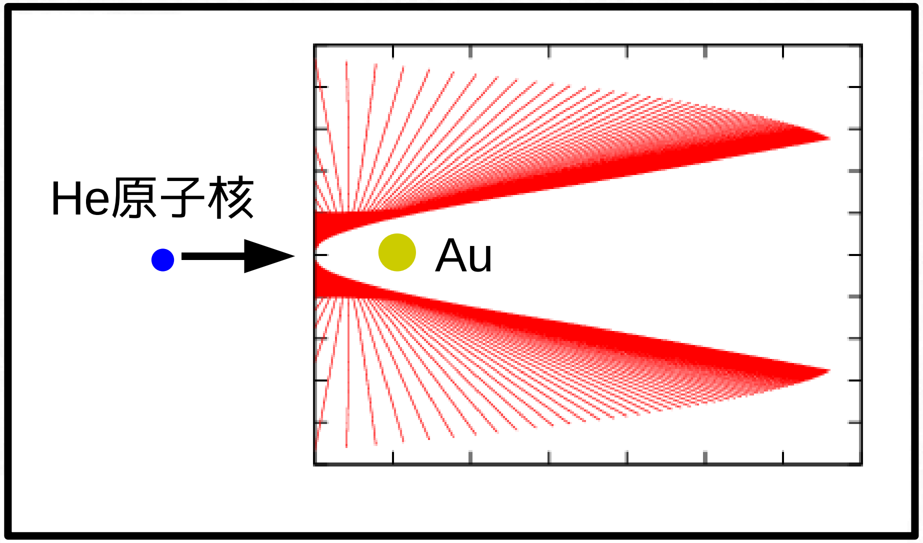
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$



■ Rutherford 散乱

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon m}\frac{ZZ'e^2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

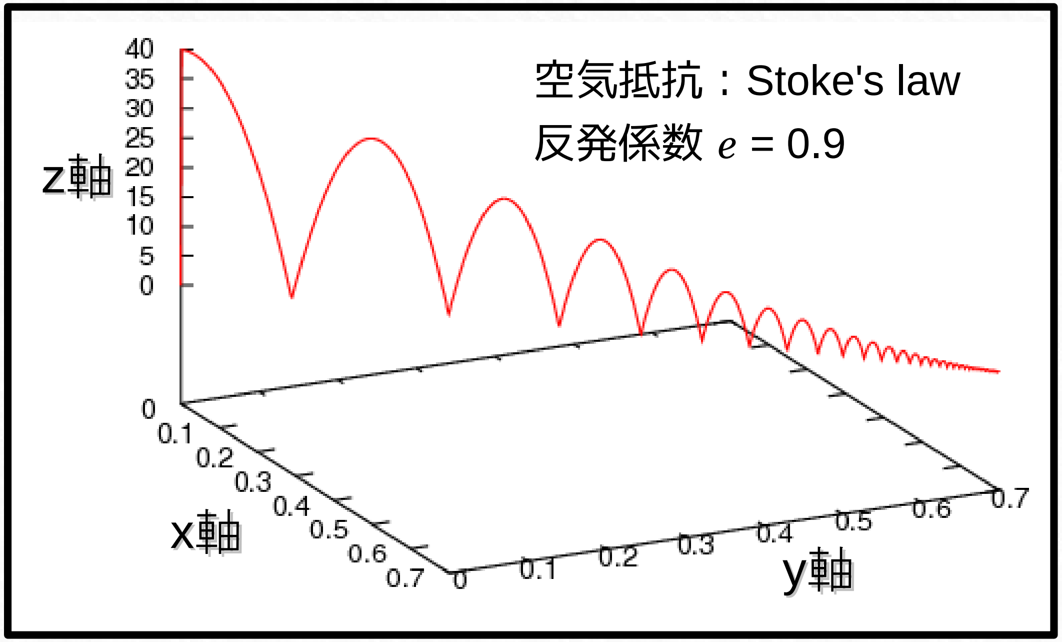


1. Runge-Kutta法で解ける物理現象

■ 物体の運動
(落下問題、振り子、単振動 etc)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$$

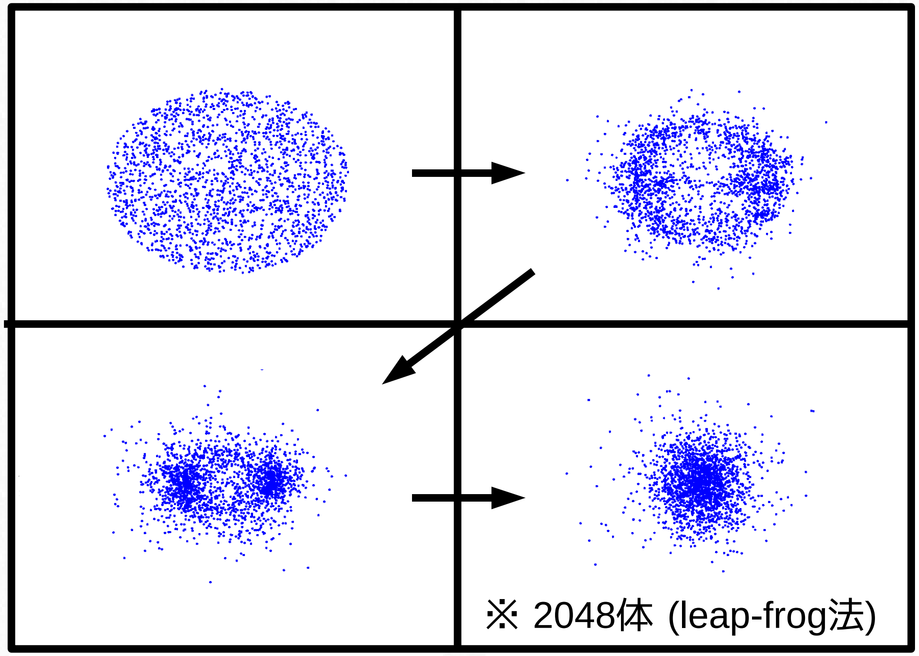
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Sigma\ \mathbf{F}_{\mathrm{i}}$$



■ 多体(N体)問題 (重力相互作用)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{i}}}{dt} = \sum_{i \neq j, 1 \leq i \leq N} G m_{\mathrm{i}} \frac{\mathbf{x}_{\mathrm{i}} - \mathbf{x}_{\mathrm{j}}}{|\mathbf{x}_{\mathrm{i}} - \mathbf{x}_{\mathrm{j}}|^3}$$



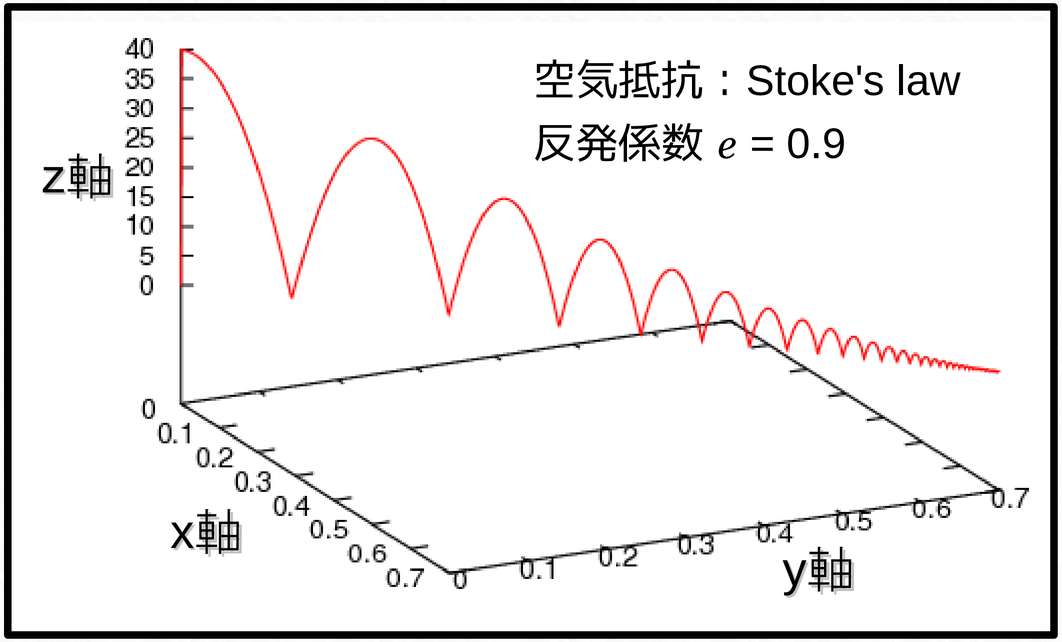
1. Runge-Kutta法で解ける物理現象

■ 物体の運動

(落下問題、振り子、単振動 etc)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$$

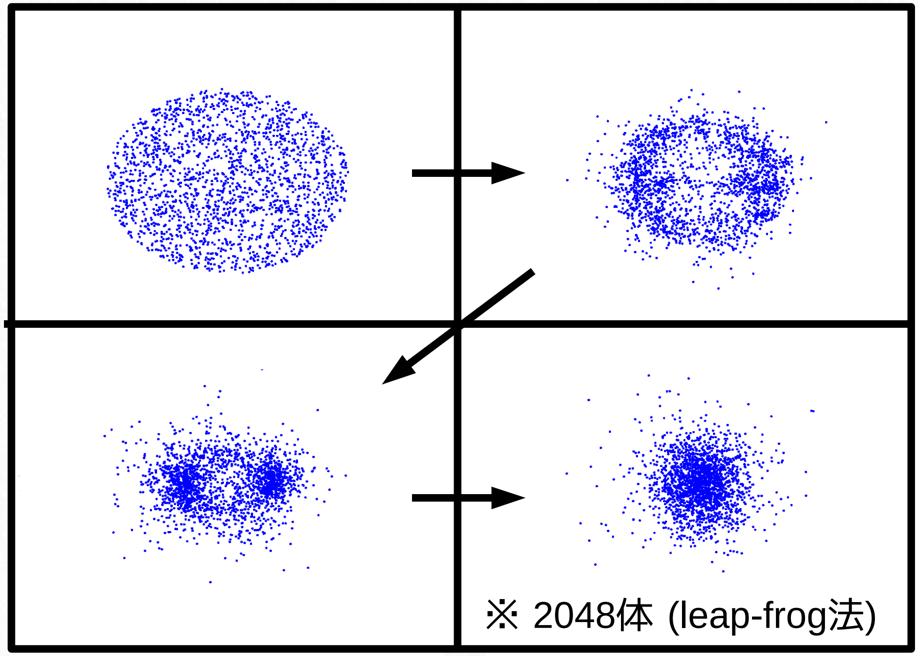
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Sigma\,\mathbf{F}_{\mathrm{i}}$$



■ 多体(N体)問題 (重力相互作用)

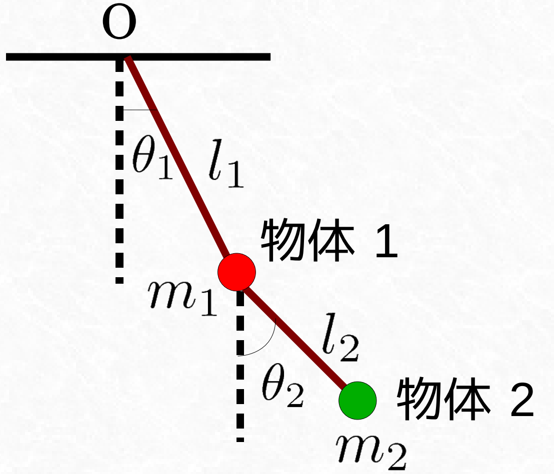
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{i}}}{dt} = \sum_{i\neq j, 1\leq i\leq N} G m_{\mathrm{i}} \frac{\mathbf{x}_{\mathrm{i}} - \mathbf{x}_{\mathrm{j}}}{|\mathbf{x}_{\mathrm{i}} - \mathbf{x}_{\mathrm{j}}|^3}$$



2. 二重振り子

糸で繋がれた「２つのおもり」から成る振り子



解析力学でLagrangeの運動方程式を勉強する時に登場 !!

初期の方位角 (の振れ幅) $\theta_1 \ll 1, \quad \theta_2 \ll 1$ の時は,

２つのおもりは、単振動となる ← **唯一**、解析解が求められる(近似解)

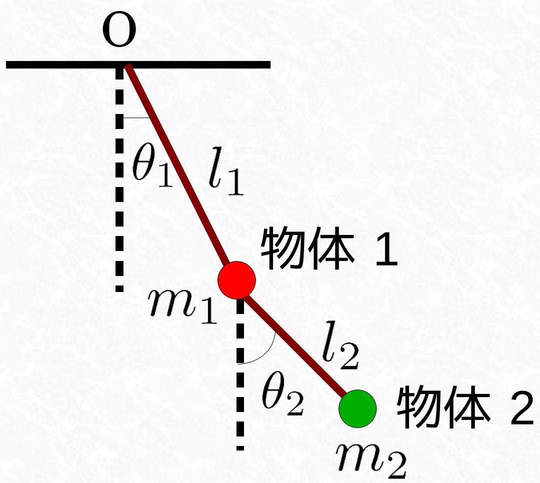
しかし、それ以外の場合はどういう運動をするか分からない

じゃあ、数値計算してみよう!!

※ ネタばれで言うと、**「カオス」**になる

3. 解くべき微分方程式

■ 物体の座標



$$(x_1, y_1) = (l_1 \sin\theta_1, -l_1 \cos\theta_1)$$

$$(x_2, y_2) = (l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2, -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2)$$

■ 系のエネルギー

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$U = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2$$

Lagrangeの運動方程式

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g/l_1(\sin\theta_2 \cos\Delta\theta - \mu \sin\theta_1) - (\dot{\theta}_2^2/l + \dot{\theta}_1^2 \cos\Delta\theta)\sin\Delta\theta}{\mu - \cos^2\Delta\theta}$$

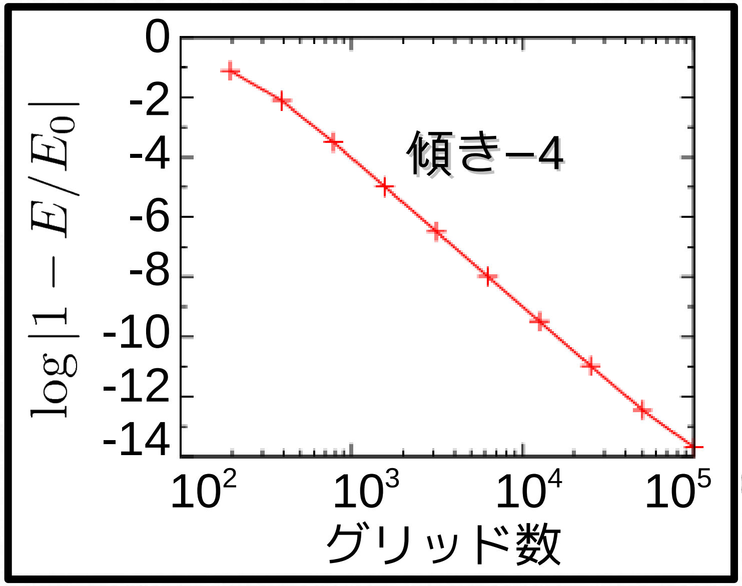
$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g\mu/l_2(\sin\theta_1 \cos\Delta\theta - \sin\theta_2) - (\mu l \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \cos\Delta\theta)\sin\Delta\theta}{\mu - \cos^2\Delta\theta}$$

但し、$l = \dfrac{l_1}{l_2}, \quad \mu = 1 + \dfrac{m_1}{m_2}, \quad \Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$

4. 数値計算コード

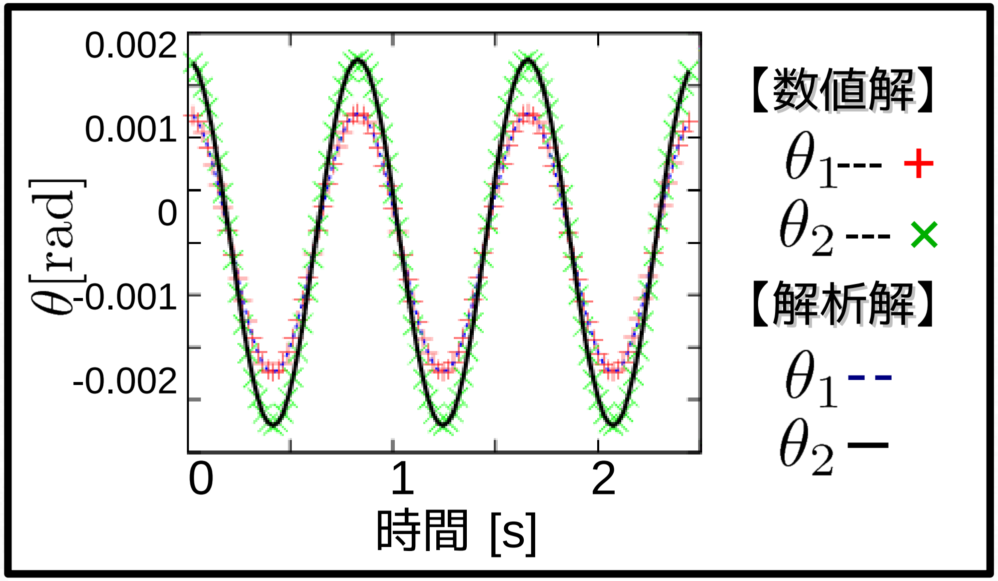
(1). 計算精度

4次の精度が出ているか?



(2). 計算コードは合っている?

解析解と比較 ($\theta_1 \ll 1, \quad \theta_2 \ll 1$)

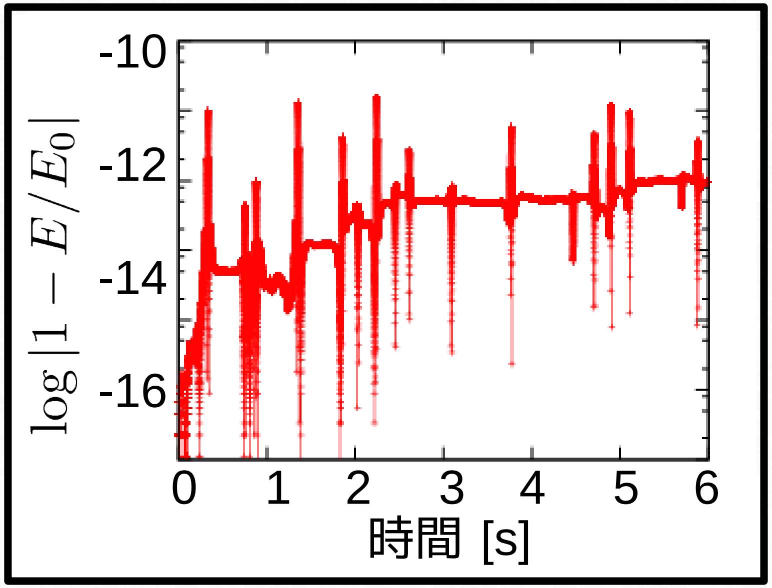


(3). 保存量

外力なしの系では、

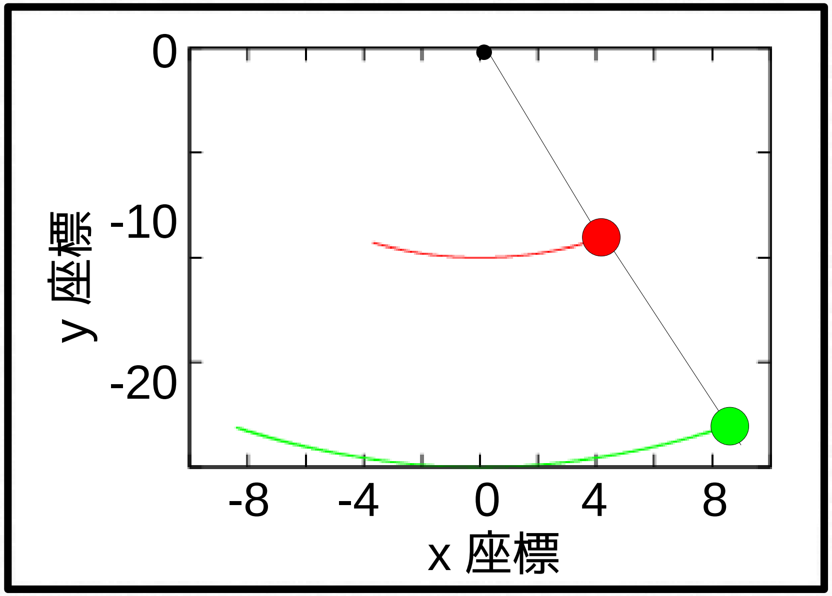
エネルギー保存 (Hamilton系)

→ どれくらいの精度まで??

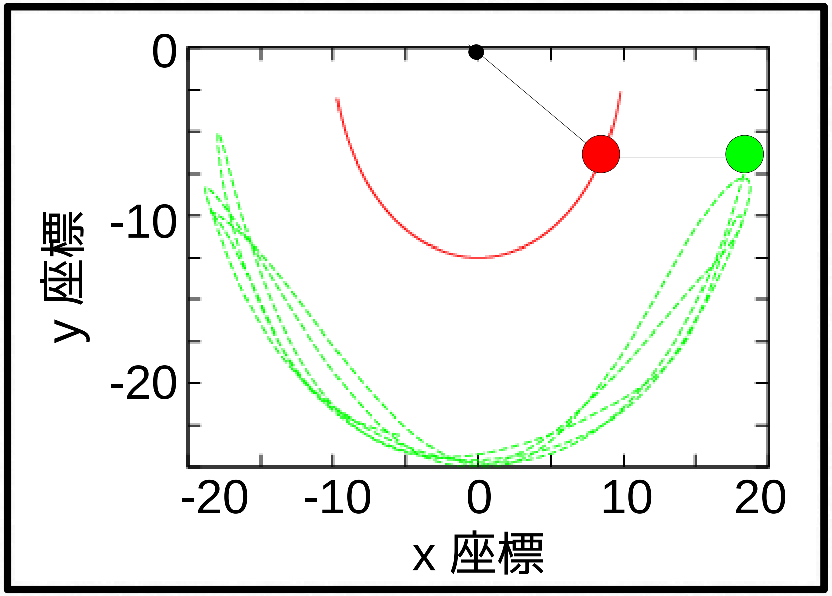


5. 結果 --- 物体の軌道

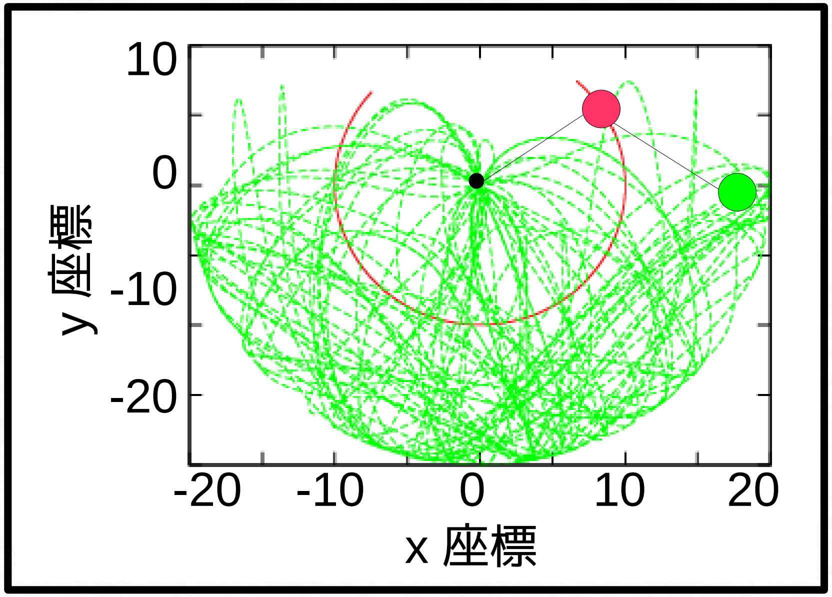
(1). $\theta_1 = 20°, \quad \theta_2 = 30°$ (Movie)



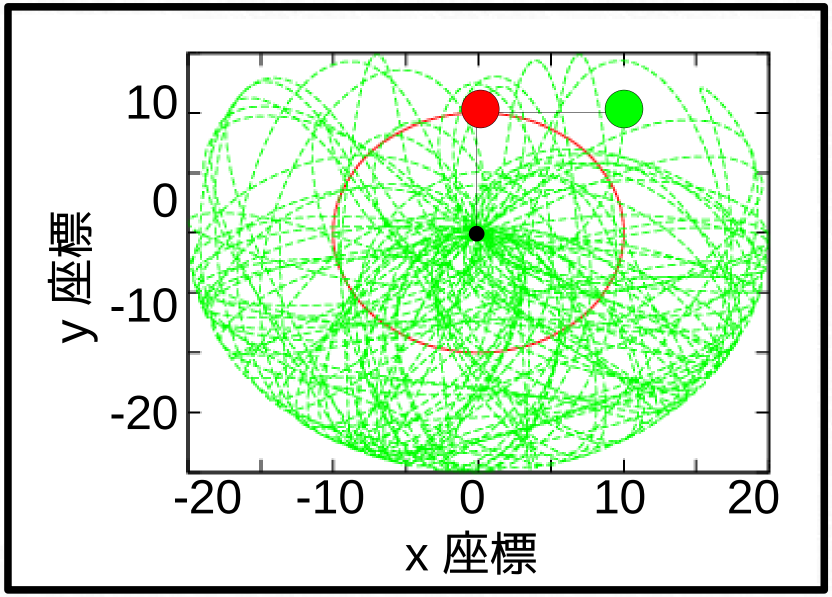
(2). $\theta_1 = 60°, \quad \theta_2 = 90°$



(3). $\theta_1 = 120°, \quad \theta_2 = 60°$



(4). $\theta_1 = 180°, \quad \theta_2 = 120°$ (Movie)



6. まとめ

二重振り子の運動を4次のRunge-Kutta法で数値計算した.

■ <u>振れ幅が十分小さい場合</u>

２つの物体の運動 --- 単振動 (解析解と一致)

■ <u>振れ幅が大きい場合</u>

物体 1 --- 半径 l_1 の円軌道上

物体 2 --- 軌道は chaos になっていた

【練習】

(1). 様々な初期角度について、物体の運動がどのようになるか調べてみよう.

(2). 物体の質量、初期角速度を変えると、物体の運動はどのように変わるか?

(3). 物体の運動をアニメーションにして見てみよう!!

Appendix 1

■ <u>コードの使い方</u>

(0) HPからdownloadしてくる
(1) tar -xvzf Pendulum.tar.gz
(2) cd ./Pendulum
(3)
以下の方法は、
アニメーションを作成しない場合の方法

※ コード本体 --- pendulum.f90 を見て下さい.

(i) make
(ii) ./pendulum
(iii) 計算結果「pendulum.dat」をgnuplotで描く

Appendix 2

■ アニメーションで作成したい場合

(1) ./start.sh をするだけ!!

簡単なアニメーションが自動で作成されます

・データファイル --- pendulum.dat
/Pendulum/data に出来ます

・アニメーション --- pendulum.gif
/Pendulum/image に出来ます

「pendulum.gif を動画ソフトで見てみて下さい」