# 宇宙飛行士 落下問題

## バネで繋がれた宇宙飛行士達の運命

森昇志

井田研究室 修士1年

# イントロダクション


ゼロ・グラビティ
© 2013 WARNER BROS. ENTERTAINMENT INC.

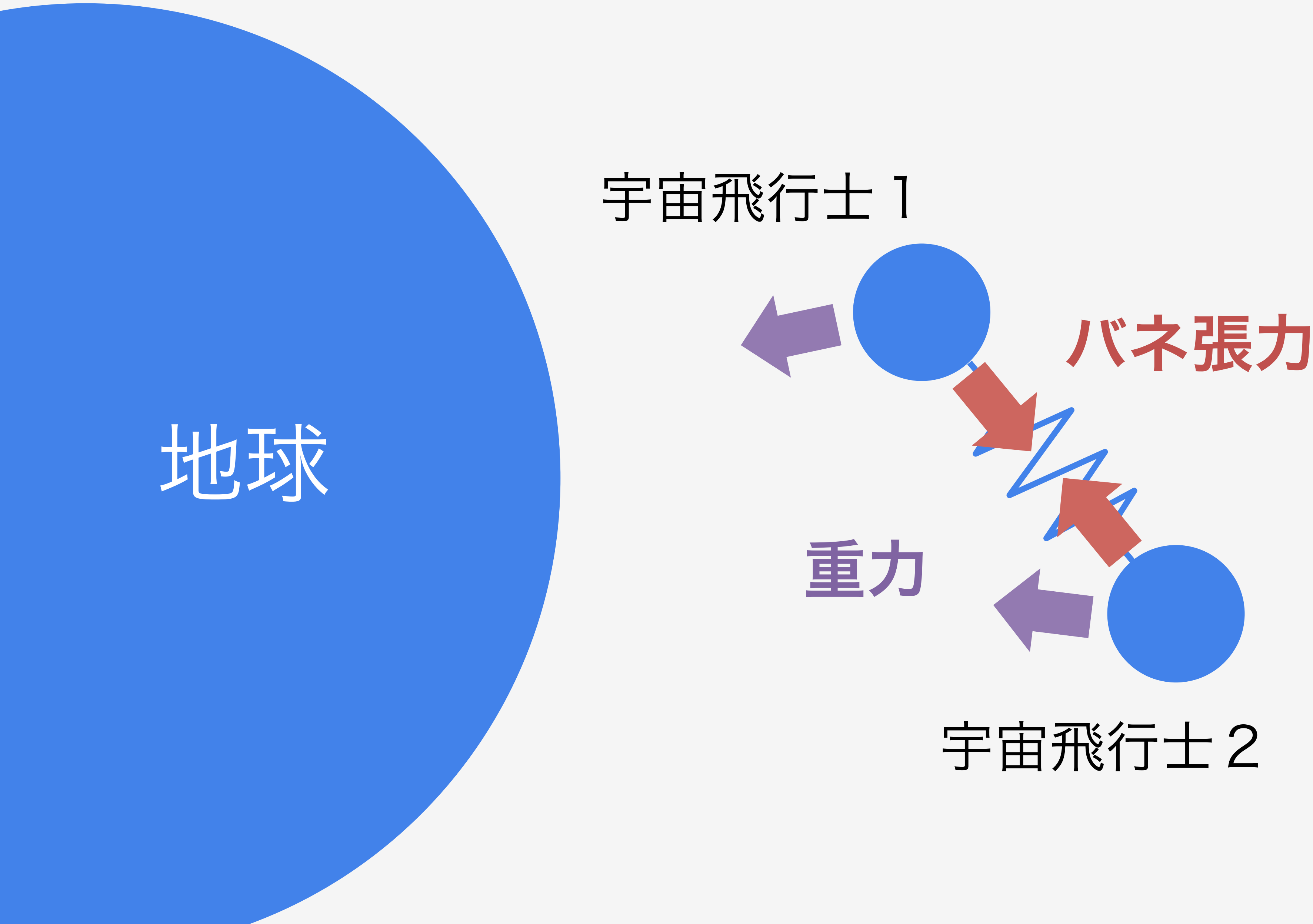
# 問題(というか好奇心)

宇宙空間でこの二人は離れ離れに
一人になってしまうと絶望的…

**宇宙飛行士の命綱をバネにしたらどうか？**

バネの力を使えば二人は離れ離れにならない！
たぶん！

# 設定



# 運動方程式

宇宙飛行士１について

$$m_1 \frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = -\frac{GMm_1\boldsymbol{r}_1}{r_1^3} + k\boldsymbol{r}_{12}$$

宇宙飛行士２について

$$m_2 \frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -\frac{GMm_2\boldsymbol{r}_2}{r_2^3} - k\boldsymbol{r}_{12}$$

t ：時間

m ：宇宙飛行士の質量

**r** ：宇宙飛行士の位置

M ：地球の質量

k ：バネ定数

G ：重力定数

$\mathbf{r}_{12}$ ：$= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

添字は宇宙飛行士１あるいは２を表す。

# 運動方程式

宇宙飛行士１について

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{GMx_1}{(x_1^2+y_1^2)^{3/2}} + \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1)$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{GMy_1}{(x_1^2+y_1^2)^{3/2}} + \frac{k}{m_1}(y_2 - y_1)$$

宇宙飛行士２について

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{GMx_2}{(x_2^2+y_2^2)^{3/2}} + \frac{k}{m_1}(x_1 - x_2)$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = -\frac{GMy_2}{(x_2^2+y_2^2)^{3/2}} + \frac{k}{m_1}(y_1 - y_2)$$

t ：時間

m ：宇宙飛行士の質量

**r** ：宇宙飛行士の位置

M ：地球の質量

k ：バネ定数

G ：重力定数

$\mathbf{r}_{12}$ ：$= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

添字は宇宙飛行士１あるいは２を表す。

# 実際に解く方程式

## 宇宙飛行士１について

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1$$

$$\frac{dy_1}{dt} = v_1$$

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2)^{3/2}} + a(x_2 - x_1)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{y_1}{(x_1^2 + y_1^2)^{3/2}} + a(y_2 - y_1)$$

## 宇宙飛行士２について

$$\frac{dx_2}{dt} = u_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = v_2$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{x_2}{(x_2^2 + y_2^2)^{3/2}} + a(x_1 - x_2)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{y_2}{(x_2^2 + y_2^2)^{3/2}} + a(y_1 - y_2)$$

t　：時間

x　：宇宙飛行士のx座標

y　：宇宙飛行士のy座標

u　：宇宙飛行士のx方向の速度

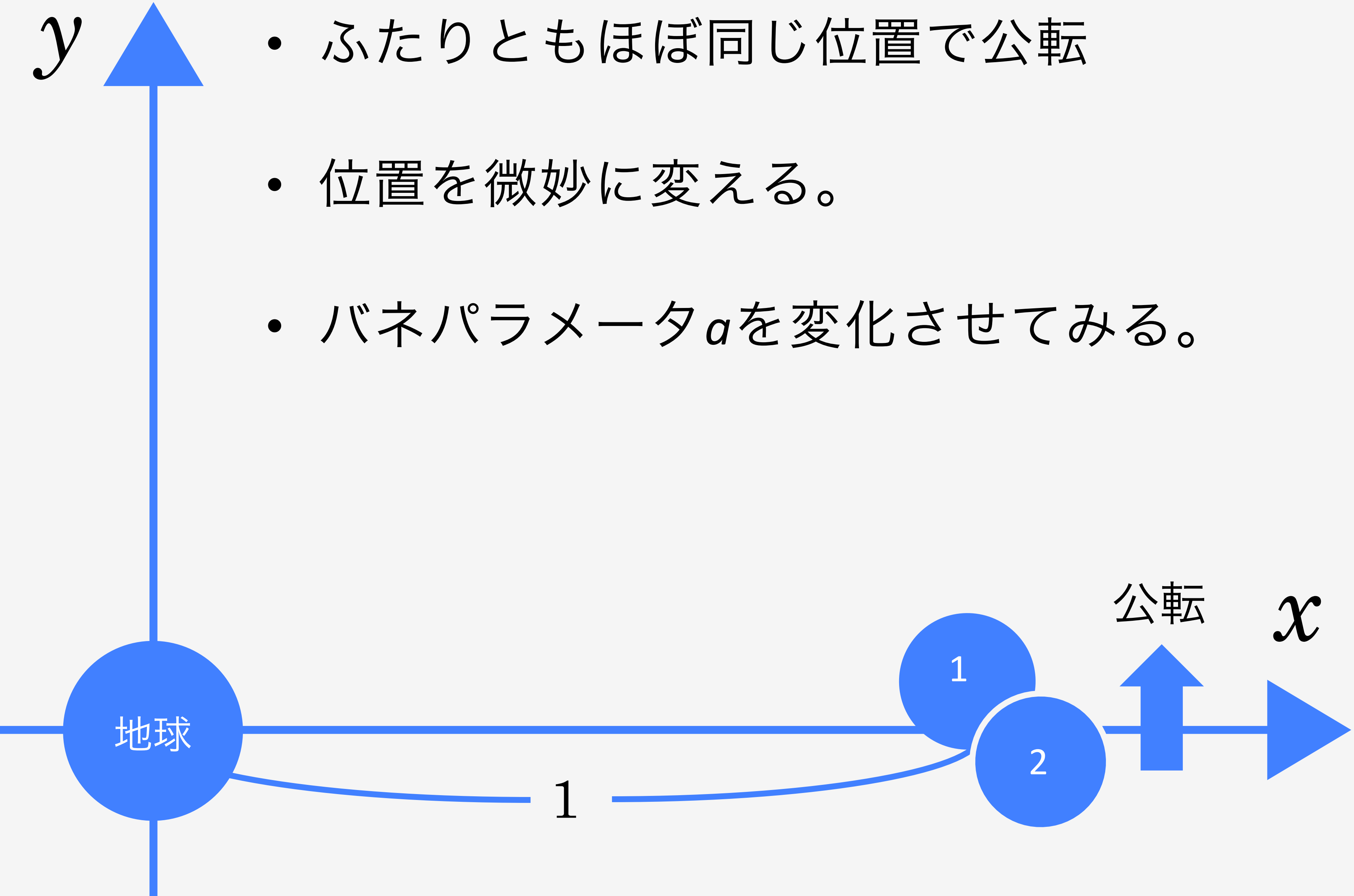
v　：宇宙飛行士のy方向の速度

*a*　：バネ・パラメータ

添字は宇宙飛行士１あるいは２を表す。
物理量は全て無次元化*してある。
*詳しくはパワポ末尾を参照

# 初期設定

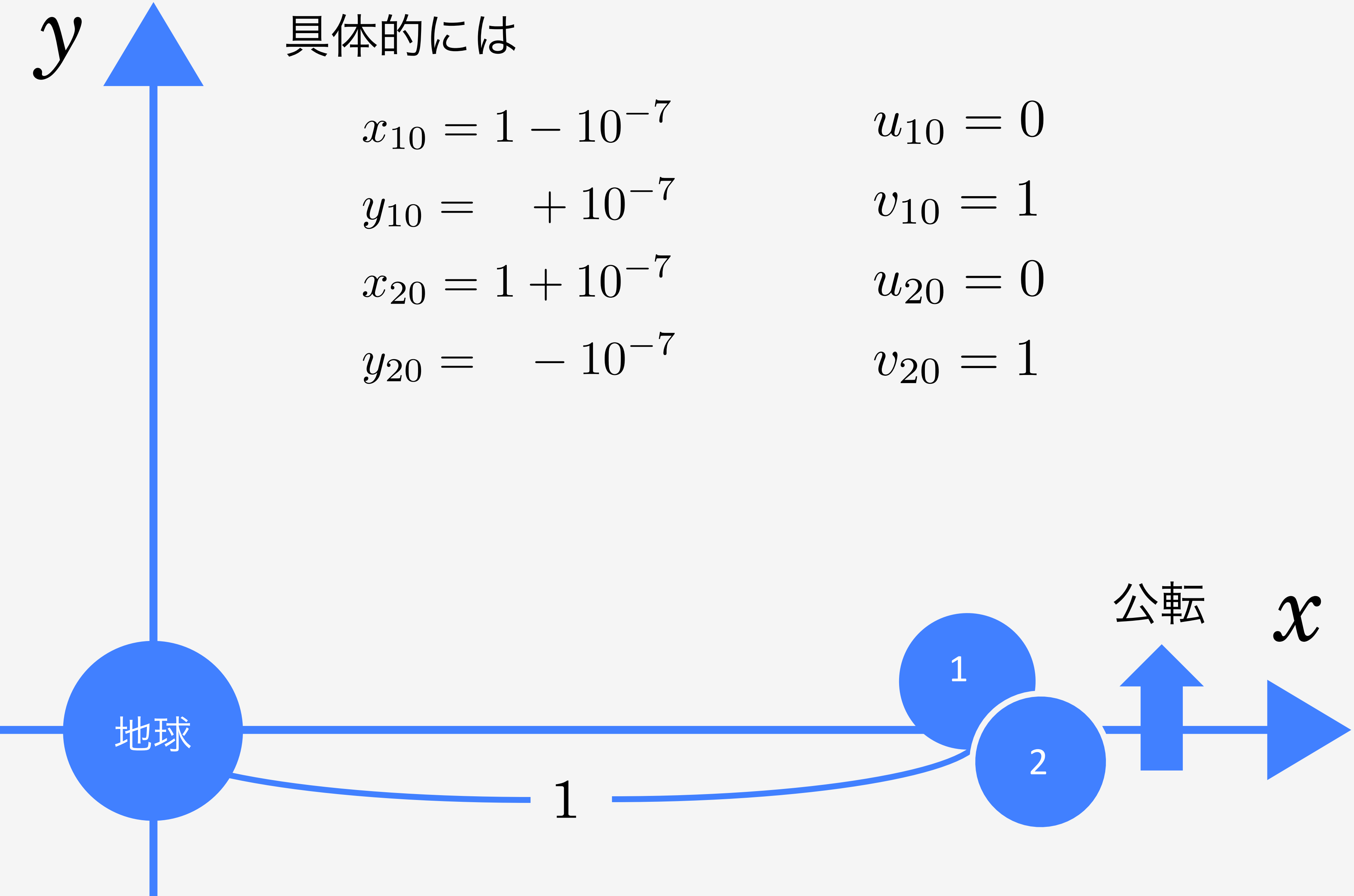
- ふたりともほぼ同じ位置で公転
- 位置を微妙に変える。
- バネパラメータ$a$を変化させてみる。



# 初期設定

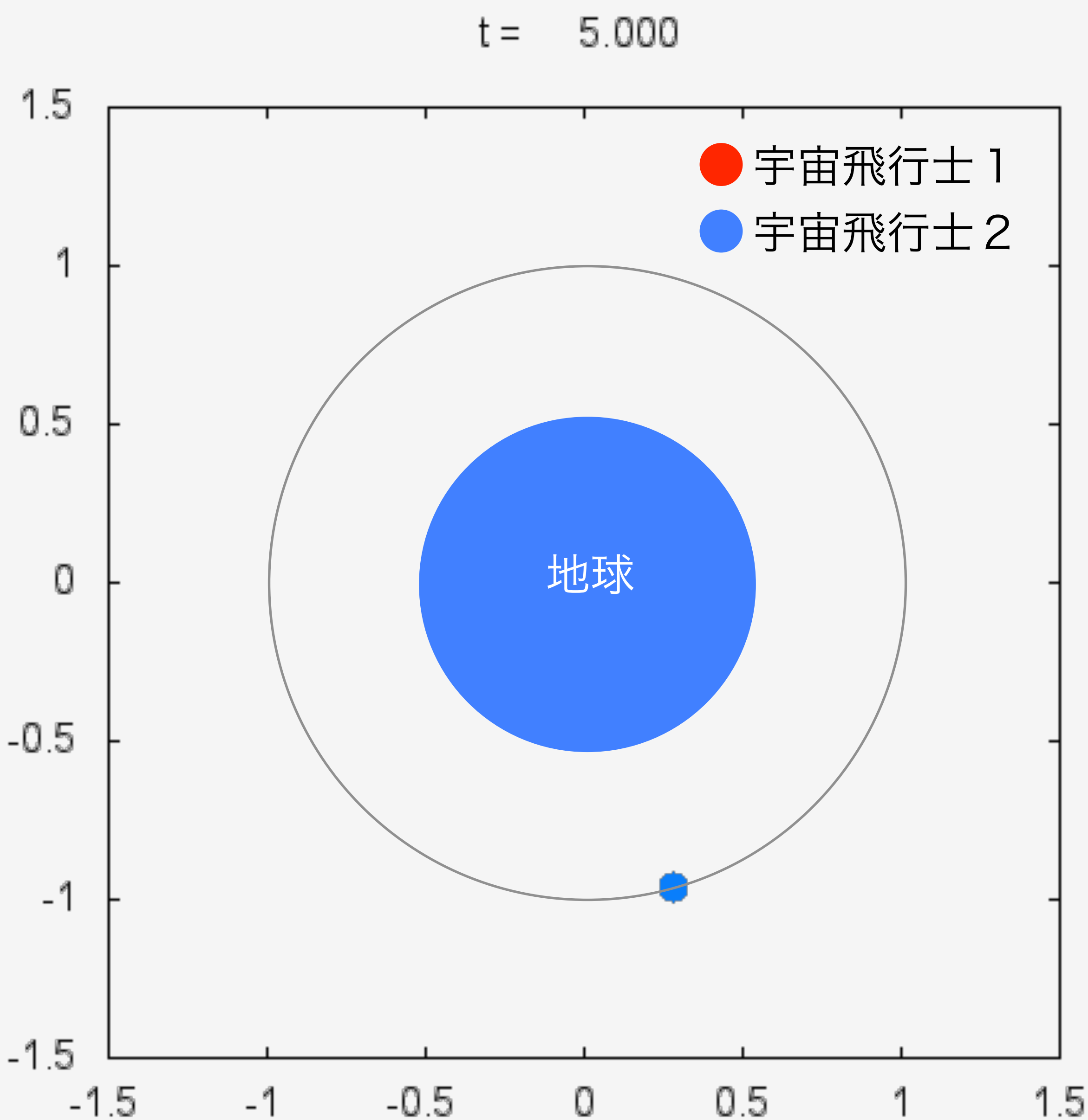
具体的には

$$x_{10} = 1 - 10^{-7} \qquad u_{10} = 0$$
$$y_{10} = \quad + 10^{-7} \qquad v_{10} = 1$$
$$x_{20} = 1 + 10^{-7} \qquad u_{20} = 0$$
$$y_{20} = \quad - 10^{-7} \qquad v_{20} = 1$$

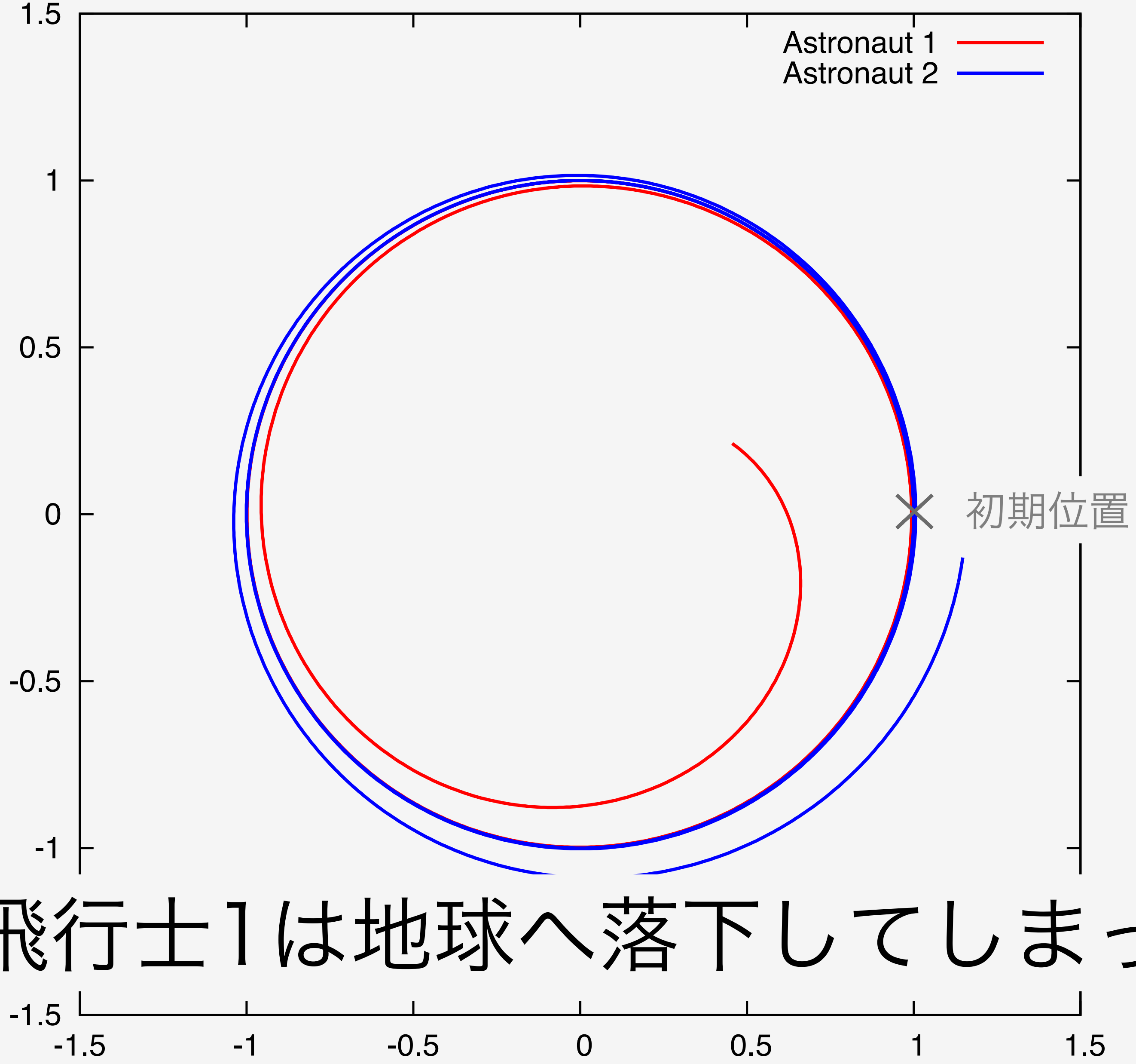


# 結果

# $\alpha = 1$ のとき

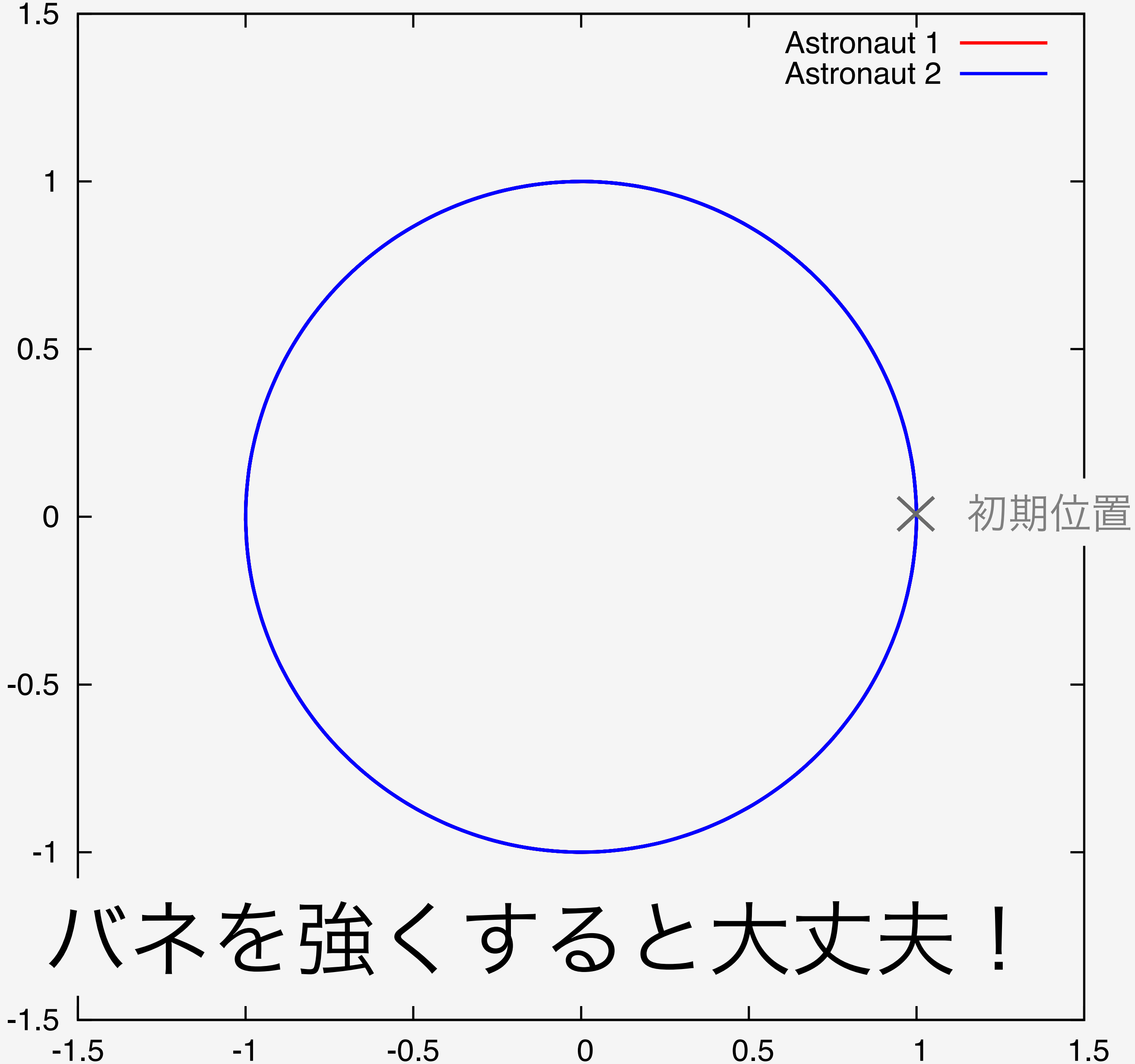


# $a = 1$ のとき



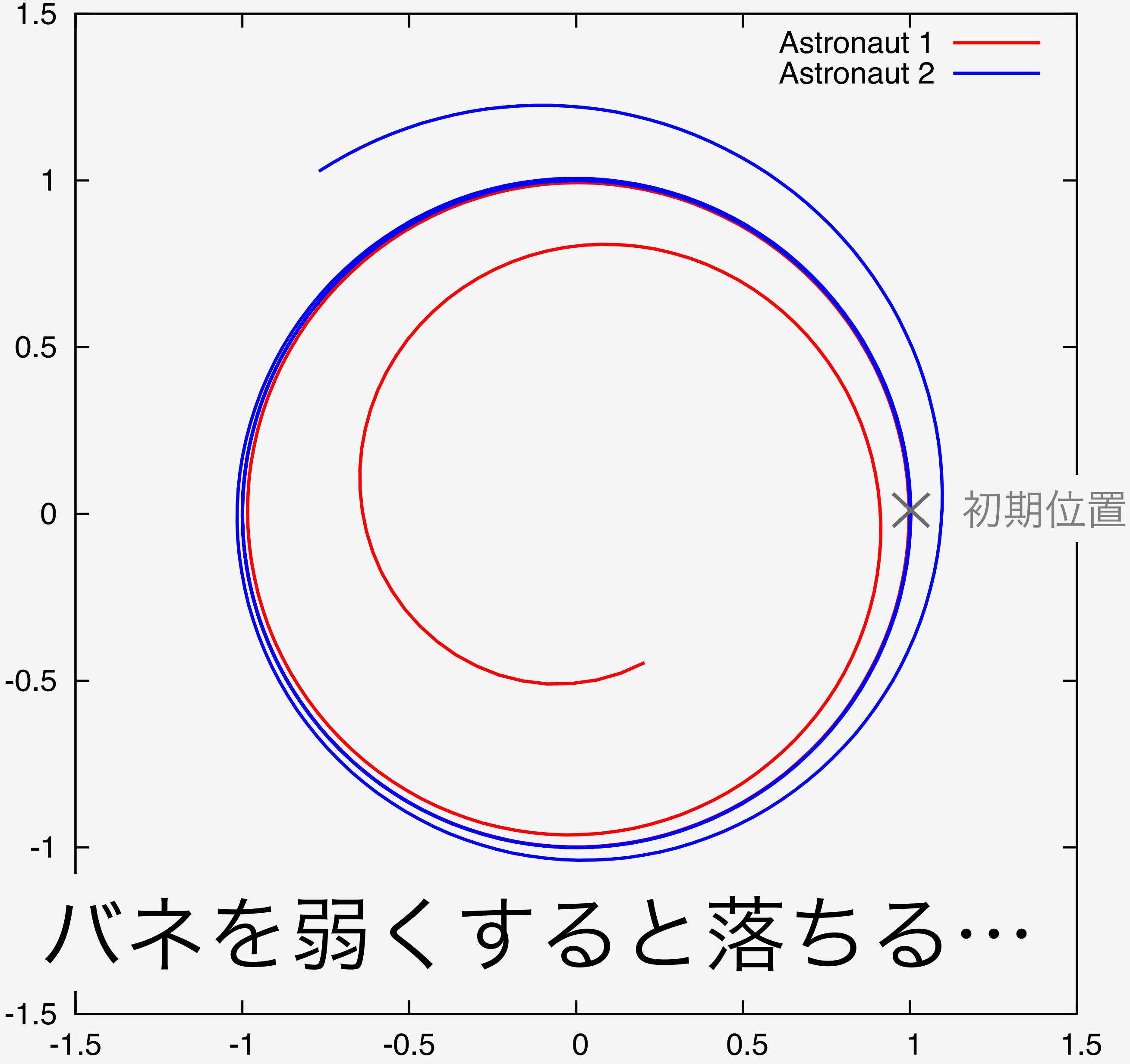

宇宙飛行士1は地球へ落下してしまった…

# $a = 10$ のとき



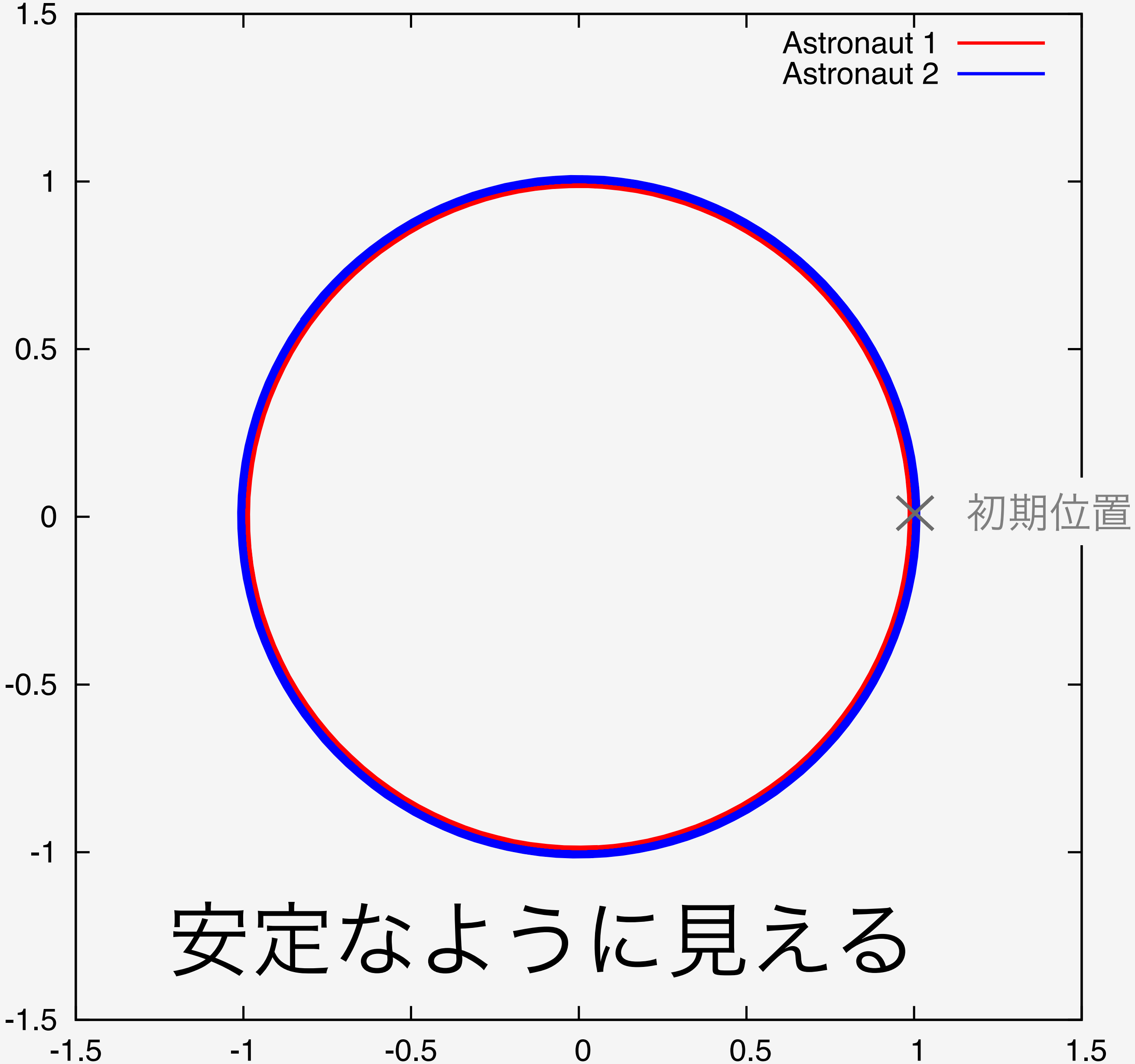

バネを強くすると大丈夫！

# $a = 0.1$ のとき




バネを弱くすると落ちる…

# $\alpha = 10^{-4}$ のとき



# まとめ

# 宇宙飛行士 落下問題とは

バネで繋がれた２人の宇宙飛行士は

初めは少しの距離だったけれども

やがて二人の距離は大きくなり

片方の宇宙飛行士は地球へと落下してしまう

# 解決策

バネは強いほうが良い！

もっというとバネじゃないほうが良い！

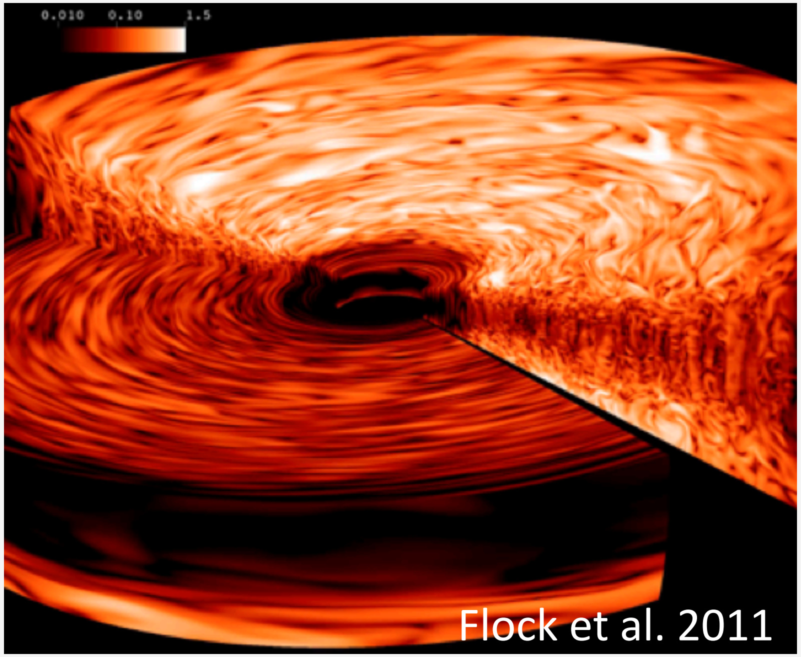
# 課題

- 宇宙飛行士の質量を変えてみるとどうなるか？
- 初期条件を色々変えてみるとどうなるか？
- 最も速く宇宙飛行士を地球に落とせる$a$の値は？
- ３人目を増やすとさらに複雑に…

他にも自由に変えてみると楽しいよ！

# ちなみに、この問題を発展させると

原始惑星系円盤中の電離したガスが磁場と結びつくことで、磁場の張力を通してこのような不安定を起こすことが知られている。（磁気回転不安定性）



# おまけ

# 無次元化の解説

# 無次元化

## 変数を無次元化すると、
## 方程式をスッキリできる！

例えば距離だったら、ある長さの何倍か、というふうにして
距離を表す。

宇宙飛行士１の実際の距離を $r_1$ 、代表的な長さを $L$ 、
無次元化された距離を $\hat{r}_1$とすれば

$$r_1 = \hat{r}_1 L$$

と書ける。これを各変数について行う。

代表的な物理量は何を選んでも良いので、方程式がスッキリ
するように選ぶ。

あとパラメータはなるべくまとめると、現象を理解しやすい。

# 無次元化

宇宙飛行士１の運動方程式を無次元化してみる。

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{GMx_1}{(x_1^2 + y_1^2)^{3/2}} + \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1)$$

代表長さをL、代表時間をT、
代表質量をM、代表バネ定数をK　とすれば

$$\frac{d^2 \hat{x}_1}{d\hat{t}^2} = -\frac{GMT^2}{L^3}\frac{\hat{x}_1}{(\hat{x}_1^2 + \hat{y}_1^2)^{3/2}} + \frac{KT^2}{M}\frac{\hat{k}}{\hat{m}_1}(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)$$

# 無次元化

$$\frac{d^2\hat{x}_1}{d\hat{t}^2} = -\frac{GMT^2}{L^3}\frac{\hat{x}_1}{(\hat{x}_1^2+\hat{y}_1^2)^{3/2}} + \frac{KT^2}{M}\frac{\hat{k}}{\hat{m}_1}(\hat{x}_2-\hat{x}_1)$$

$$\frac{GMT^2}{L^3} = 1 \quad \frac{KT^2}{M} = 1$$ とすると、

これは言い換えると、代表時間、代表バネ定数を

$T \equiv \sqrt{L^3/GM}$

$K \equiv GM^2/L^3$

としている。(代表的な物理量はどんなものでも良い。)

$$\frac{d^2\hat{x}_1}{d\hat{t}^2} = -\frac{\hat{x}_1}{(\hat{x}_1^2+\hat{y}_1^2)^{3/2}} + \frac{\hat{k}}{\hat{m}_1}(\hat{x}_2-\hat{x}_1)$$

# 無次元化

$$\frac{d^2\hat{x}_1}{d\hat{t}^2} = -\frac{\hat{x}_1}{(\hat{x}_1^2+\hat{y}_1^2)^{3/2}} + \frac{\hat{k}}{\hat{m}_1}(\hat{x}_2-\hat{x}_1)$$

パラメータをまとめるために

$\dfrac{\hat{k}}{\hat{m}_1} = \hat{a}$ とすると

$$\frac{d^2\hat{x}_1}{d\hat{t}^2} = -\frac{\hat{x}_1}{(\hat{x}_1^2+\hat{y}_1^2)^{3/2}} + \hat{a}(\hat{x}_2-\hat{x}_1)$$

# 無次元化した方程式

## 宇宙飛行士１について

$$\frac{d\hat{x}_1}{d\hat{t}} = \hat{u}_1$$

$$\frac{d\hat{y}_1}{d\hat{t}} = \hat{v}_1$$

$$\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{t}} = -\frac{\hat{x}_1}{(\hat{x}_1^2+\hat{y}_1^2)^{3/2}} + \hat{a}(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)$$

$$\frac{d\hat{v}_1}{d\hat{t}} = -\frac{\hat{y}_1}{(\hat{x}_1^2+\hat{y}_1^2)^{3/2}} + \hat{a}(\hat{y}_2 - \hat{y}_1)$$

## 宇宙飛行士２について

$$\frac{d\hat{x}_2}{d\hat{t}} = \hat{u}_2$$

$$\frac{d\hat{y}_2}{d\hat{t}} = \hat{v}_2$$

$$\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{t}} = -\frac{\hat{x}_2}{(\hat{x}_2^2+\hat{y}_2^2)^{3/2}} + \hat{a}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)$$

$$\frac{d\hat{v}_2}{d\hat{t}} = -\frac{\hat{y}_2}{(\hat{x}_2^2+\hat{y}_2^2)^{3/2}} + \hat{a}(\hat{y}_1 - \hat{y}_2)$$

t ：時間

x ：宇宙飛行士のx座標

y ：宇宙飛行士のy座標

u ：宇宙飛行士のx方向の速度

v ：宇宙飛行士のy方向の速度

m ：宇宙飛行士の質量

M ：地球の質量

*a* ：バネ・パラメータ

G ：重力定数

添字は宇宙飛行士１あるいは２を表す。
ˆ は無次元化した物理量を表す。

**代表物理量の定義**

L ＝ 2地球半径
M ＝ １地球質量　とすると

T =√L3/GM = 38分　となる。

これを使えば数値的な時間 $\hat{t}$ を物理的な時間に直すことができる。
(例えば $\hat{t} = 0.1$ ならば $t \simeq 3.8\mathrm{min}$ )

# 物理的背景の解説

# 彼らの間で一体何が起きたのか

## 角運動量の輸送

宇宙飛行士１の$\phi$方向の運動方程式

$$m_1(2u_1\Omega_1 + r_1\dot{\Omega}_1) = -k|r_{12}|$$

$\times r_1$

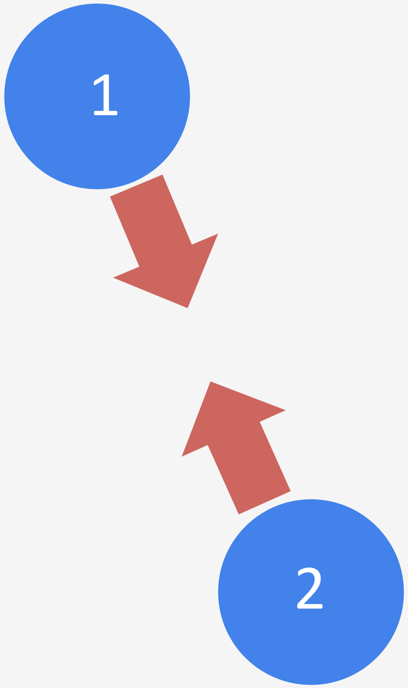
$$m_1 r_1(2u_1\Omega_1 + r_1\dot{\Omega}_1) = -r_1 k|r_{12}|$$

角運動量$L_1$は $L_1 = m_1 r_1^2 \Omega_1$ なので

$$\frac{dL_1}{dt} = -r_1 k|r_{12}| < 0$$ (角運動量輸送の式)

同様に宇宙飛行士２についても求める

$$\frac{dL_2}{dt} = +r_2 k|r_{12}| > 0$$ (角運動量輸送の式)




宇宙飛行士１の角運動量は失われる。
逆に宇宙飛行士２は角運動量を得る。

# 彼らの間で一体何が起きたのか

$$\frac{dL_1}{dt} = -r_1 k |r_{12}| < 0$$

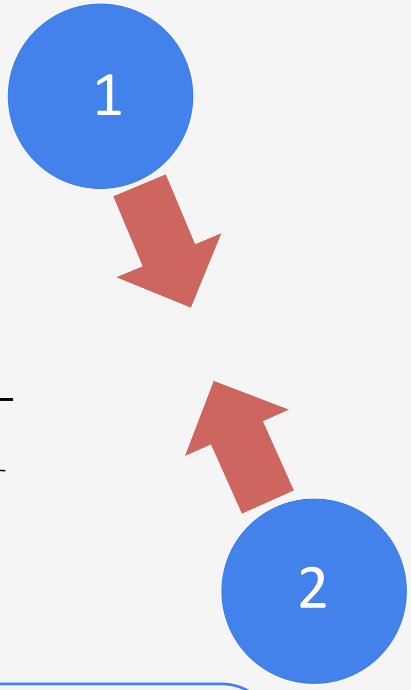
$$\frac{dL_2}{dt} = +r_2 k |r_{12}| > 0$$

$L_1 = m_1 r_1^2 \Omega_1$

$L_2 = m_2 r_2^2 \Omega_2$

ほぼ円軌道だとすると $\Omega_1 = \sqrt{\dfrac{GM}{r_1^3}}$ より $L_1 = \sqrt{GMr_1}$

$L_1$が減少し、$r_1$が減少する。　$L_2$が上昇し、$r_2$が上昇する。




バネ張力によって宇宙飛行士１から宇宙飛行士２へ**角運動量が輸送**されることで、宇宙飛行士１は中心へ宇宙飛行士２は外側へと移動した。