

研究プロジェクト第2回 課題：ダストの中心星への落下

- ダスト粒子の位置を $\mathbf{r}(t)$, 速度を $\mathbf{v}(t)$ とする。 $\mathbf{r}$ の原点は中心星の位置とする。
- ダスト粒子の位置でのガスの速度を $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ とする。
- ダストは中心星からの重力に加えて、ガス抵抗を受けるとする。

このとき、ダストの運動方程式は以下のように書ける：

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{GM_*}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{t_{\text{stop}}} \quad (1)$$

ここで、ドットは時間微分、 M_* は中心星の質量で、 $r = |\mathbf{r}|$ 。以下では、ガスの運動は円運動であると仮定し、かつ $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ は既知であるとする。

式 (1) は、中心星を原点とする極座標で解くのが便利である。時刻 t におけるダスト粒子の位置を、極座標表示で $(r(t), \phi(t))$ と表す。極座標系の基本ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi$ は、デカルト座標系の基本ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ を用いて

$$\mathbf{e}_r = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y \quad (= \mathbf{r}/r) \quad (2)$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \quad (= \mathbf{e}_r \text{ を } 90^\circ \text{ 回転させたもの}) \quad (3)$$

で定義される。これらを用いて、ダストとガスの速度ベクトルを

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = u_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (5)$$

のように展開しよう。ここで、ガスの円運動の仮定を用いた。

1. $\dot{\phi}$ はダスト粒子の角速度である。 $\dot{\phi}$ を r および v_ϕ を用いて書き表せ。
2. ϕ が t に依存するので、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi$ も t に依存する。 $\dot{\mathbf{e}}_r, \dot{\mathbf{e}}_\phi$ を計算し、結果を $r, v_r, v_\phi, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi$ のうち必要なものを用いて書き表せ。
3. 式 (1) の r 成分および ϕ 成分を求めよ。 $\dot{\mathbf{e}}_r, \dot{\mathbf{e}}_\phi$ は前問の結果を用いて消去すること。
4. ガスの公転速度がケプラー運動

$$V_K = \sqrt{\frac{GM_*}{r}} \quad (6)$$

からずれている場合は、ダスト粒子の運動も円ケプラー運動からずれる。このときのガスとダストの公転速度をそれぞれ

$$u_\phi = V_K + u'_\phi \quad (7)$$

$$v_\phi = V_K + v'_\phi \quad (8)$$

と書くことにする。円ケプラー運動からのずれが小さければ、 u'_ϕ , v_r , v'_ϕ は微小であるとみなせる。前問で導いた方程式を v_r , v'_ϕ の 1 次までの精度で評価し、以下の式

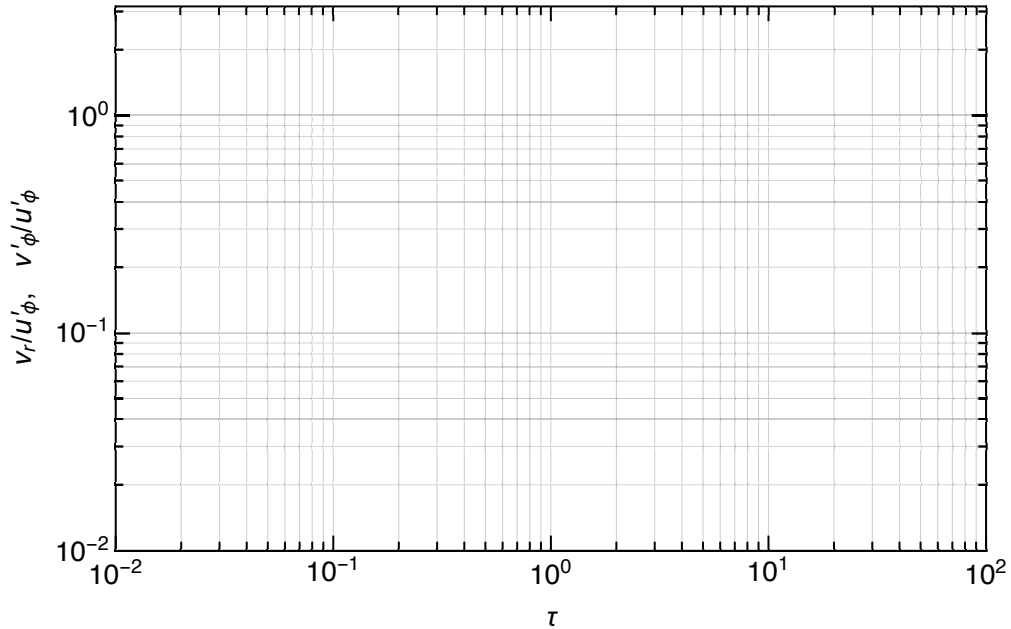
$$\dot{v}_r - \frac{2V_K v'_\phi}{r} = -\frac{v_r}{t_{\text{stop}}} \quad (9)$$

$$\dot{v}'_\phi + \frac{V_K v_r}{2r} = -\frac{v'_\phi - u'_\phi}{t_{\text{stop}}} \quad (10)$$

を導け。[ヒント: V_K が $r(t)$ の関数であることに注意。 $\dot{V}_K$ は V_K , r , v_r を用いてどのように書けるか?]

5. 前問で導いた v_r , v'_ϕ に関する方程式の定常解 ($\dot{v}_r = \dot{v}'_\phi = 0$ の解) を求め、結果を u'_ϕ および τ のみを用いて書き表せ。ここで、 $\tau \equiv \Omega_K t_{\text{stop}}$ であり、 Ω_K は円ケプラー運動の公転角速度である。

6. v_r/u'_ϕ および v'_ϕ/u'_ϕ を、 τ の関数として両対数グラフに書き表せ。



7. 圧力が外側に向かって減少する通常の原始惑星系円盤では、 $u'_\phi < 0$ である。ダストの中心星方向への落下の速さの最大値とそのときの τ を求めよ。