

研究プロジェクト第3回 課題：ダストの落下と成長

- ガス円盤の速度を $\mathbf{u} = (V_K + u'_\phi)\mathbf{e}_\phi$ とする。
- 円盤の中の大きなダスト粒子が小さなダスト粒子を捕獲して成長するとする。
- 大きな粒子の軌道半径を r , 粒子半径を a , 質量を m , 内部密度を ρ_i , 制動時間を t_{stop} , 速度を $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + (V_K + v'_\phi)\mathbf{e}_\phi$ とする。簡単のため、**大きなダストの形状は成長しても常に球形であるとし、かつ内部密度 ρ_i は常に一定値であるとする。**
- 小さな粒子の粒径は a よりも十分小さいとし、その速度はガスの速度と等しいとする。小さな粒子の円盤内での空間質量密度を ρ_d とする。

1 ダストの成長と落下の方程式の導出

- 1-1. 大小ダスト粒子の相対速度を Δv とする（上で定義した変数で書けるがいまはしなくてよい）。冒頭の太字の仮定に注意して、大きな粒子の粒径の変化率 da/dt を ρ_d , ρ_i , Δv を用いて書き表せ。[ヒント: まずは dm/dt を書き表せ。]
- 1-2. 大きなダストは成長しながら軌道移動するので、軌道半径 r は粒径 a の関数とみなすことができる。 $dr/dt = v_r$ であることに注意して、 dr/da を ρ_d , ρ_i , Δv , v_r を用いて書き表せ。
- 1-3. $u'_\phi < 0$ を仮定する。前回の演習で得られた v_r , v'_ϕ と冒頭の仮定に注意して、前問で得られた dr/da が以下の表に書き換えられることを示せ。

$$\boxed{\frac{dr}{da} = -\frac{8\rho_i}{\rho_d\sqrt{4 + \tau^2}}} \quad (1)$$

2 ダストの成長と落下の数値計算

ここでさらに以下の仮定を追加する。

- a) 無次元化された制動時間 τ は以下のように与えられるとする。

$$\tau = \frac{\pi\rho_i a}{2\Sigma_g} \quad (2)$$

ここで、 Σ_g はガスの面密度である。この式は、ダスト粒子の粒径 a が周囲のガス分子

の平均自由行程（分子どうしが衝突するまでの平均的な飛距離）よりも十分に小さい場合（ガスが自由分子流としてふるまう場合）に成立する。

- b) **小さなダストの空間質量密度 ρ_d は、ガス円盤の密度 ρ_g の 1% であるとする。** これは、小さなダストがガス円盤の中で、空間的に一様に分布していると仮定することに相当する。
- c) **大きなダストの内部密度 ρ_i を 3 g cm^{-3} とする。** これは岩石の典型的な密度であり、大きなダスト粒子（＝小さなダスト粒子の塊）の中に隙間がないような状況を考えることに相当する。

第 1 回の宿題で、 Σ_g および ρ_g を r の関数として自作したので、これを使えば dr/da が r と a の関数として決まる。この微分方程式を数値的に解いて、 r を a の関数として求めよう。数値計算には、以下のオイラー法を用いよ。

オイラー法による常微分方程式の数値積分

- 解きたい微分方程式を $\frac{dr}{da} = f(a, r)$ とする。
- $a = a_0, a_1, a_2, \dots$ における r の値を $r_0, r_1, r_2, \dots$ とする。
- a_0 および r_0 は初期条件として与えられているとする。

このとき、オイラー法とは、 $r_1, r_2, r_3, \dots$ を以下の漸化式から求める方法である。

$$\frac{r_{n+1} - r_n}{a_{n+1} - a_n} = f(a_n, r_n) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{n+1} = r_n + f(a_n, r_n) \cdot (a_{n+1} - a_n)} \quad (4)$$

変数の列 $a_1, a_2, \dots$ は任意にとることができる（だが以下を見よ）。

式 (2) はもはやもとの微分方程式でないので、その解は微分方程式の解（「真の解」という）に完全には一致しない。数値解が真の解に十分近づく（十分に「収束する」という）ためには、 $a_{n+1} - a_n$ を十分小さくとる必要がある。どのくらい小さくとればよいかは、もちろん解くべき方程式の性質に依存する。

いま考えている問題では、 r を a の関数として何桁にもわたって解こうとしているので、 a_n を等比級数 $\boxed{a_{n+1} = 10^c a_n}$ (c : 正の定数) で与えるとよい。以下の計算では、ひとまず $c = 0.05$ とする。数値解の収束に興味があれば、 c の値を何通りか試して、 c をどのくらい小さくとればグラフの見た目が変わらなくなるかを見てみるとよい。

- 2-1. 初期の粒子半径 a_0 を $1 \mu\text{m}$ とし、初期の軌道半径 r_0 を 10 au とする。微分方程式を $a = 1 \text{ km}$ まで解き、結果を r (横軸) と a (縦軸) の両対数グラフにプロットせよ (例を末尾の図 1 に示す)。半径 1 km のダストを「微惑星」と呼ぶことにすると、微惑星はどこにできたことになるか? (そもそも円盤の中で微惑星はできているか? 若い太陽の半径はおよそ 0.01 au である。)
- 2-2. 2-1. で得たグラフに、 $\tau = 1$ に対応する線 $a = 2\Sigma_g(r)/(\pi\rho_i)$ も合わせてプロットし、2-1. の計算で得られた曲線の振る舞いについて考察せよ。
- 2-3. 2-1. の計算を $r_0 = 1 \text{ au}, 100 \text{ au}$ についても行い、3 つの計算結果を 1 つのグラフにプロットせよ。3 つの結果を比較し、どのような特徴が見て取れるか考察せよ。
- 2-4. 冒頭で追加した仮定 a, b, c は、いつでも成立するわけではない。より一般には以下のような状況があり得る (図 2) :
- a') ダスト粒子の大きさがガス分子の平均自由行程 λ よりも大きい場合 (ガスが流体としてふるまう場合)、式 (2) が成り立たない。両方の場合を考慮すると、 τ は

$$\tau = \frac{\pi\rho_i a}{2\Sigma_g} \left(1 + \frac{4a}{9\lambda} \right) \quad (5)$$

と書ける ($a \ll \lambda$ のときにこの式が式 (2) に帰着することに注意)。原始惑星系円盤のように主に水素分子で構成されるガスの λ は

$$\lambda \approx 2 \left(\frac{10^{-9} \text{ g cm}^{-3}}{\rho_g} \right) \text{ cm} \quad (6)$$

と表すことができる。

- b') ダストは中心星の重力の影響により、ガス円盤の中心面 (赤道面) に集中する傾向にある。このような現象をダストの**沈殿**という。ダストが沈殿すると、赤道面におけるダストの密度が沈殿していない場合に比べて高くなる。
- c') 大きなダスト粒子の中に大きな**空隙** (くうげき) があると、大きなダストの平均内部密度 ρ_i は密な固体の密度よりも低くなる。

仮定 a, b, c のうちのどれか 1 つ以上を仮定 a', b', c' に置き換え、ダストが動径方向にできるだけ移動せずに微惑星へと成長する状況を探してみよ。

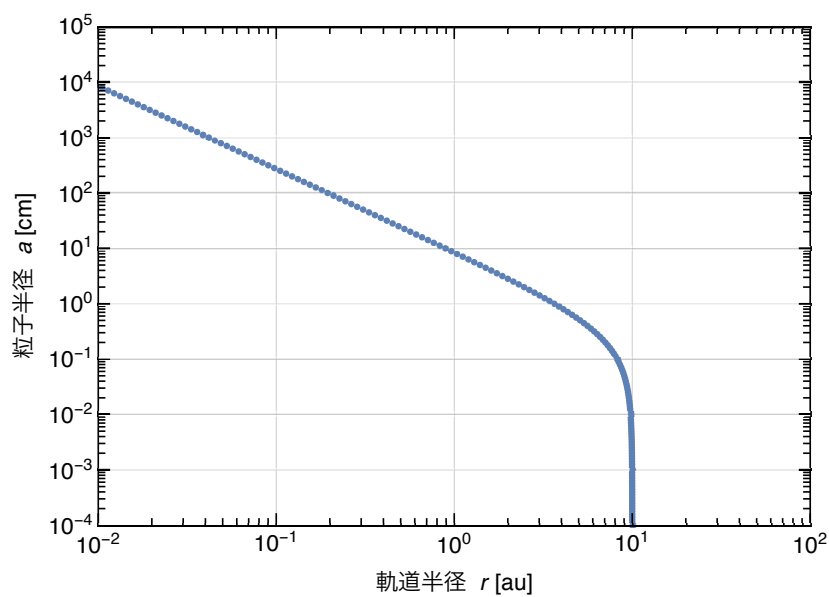
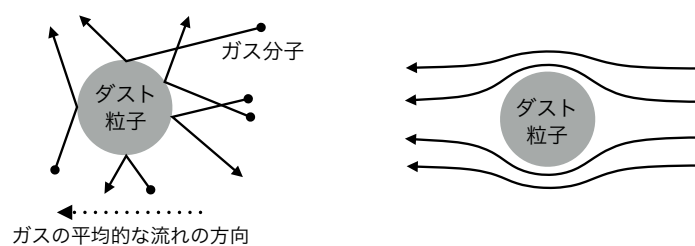
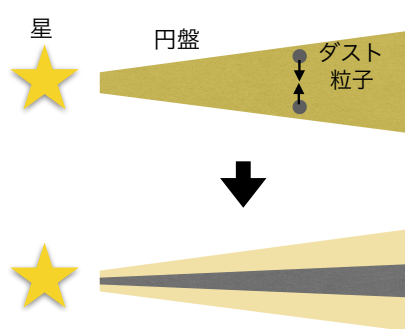


図1 $\Sigma_g = 1.7 \times 10^3 (r/1 \text{ au})^{-1.5} \text{ g cm}^{-2}$, $\rho_g = \Sigma_g / (0.05r)$ の場合の問題 2-1. の解。



a') ダスト粒子に向かうガス流のふるまい
左: 平均分子流 ($a \ll \lambda$), 右: 流体流 ($a \gg \lambda$)



b') ダストの沈殿



c') 低密度のダストの塊

図2 仮定 a', b', c' の概念図。